VYSOKÁ ŠKOLA
CHEMICKO-TECHNOLOGICKÁ
V PRAZE

ZÁKLADY MATEMATIKY PRO BAKALÁŘE

Doc. RNDr. Daniel Turzík, CSc.

RNDr. Miroslava Dubcová, Ph.D.

RNDr. Pavla Pavlíková, Ph.D.

OPPA
PRAHA PRAGUE PRAGA PRAG
EVROPSKÁ UNIE
Evropský sociální fond
Praha & EU: Investujeme do vaší budoucnosti

VYSOKÁ ŠKOLA
CHEMICKO-TECHNOLOGICKÁ
V PRAZE

ZÁKLADY MATEMATIKY PRO BAKALÁŘE

Doc. RNDr. Daniel Turzík, CSc.
RNDr. Miroslava Dubcová, Ph.D.
RNDr. Pavla Pavlíková, Ph.D.

PRAHA
2011

OPPA
PRAHA PRAGUE PRAGA PRAG
EVROPSKÁ UNIE
Evropský sociální fond
Praha & EU: Investujeme do vaší budoucnosti

Anotace:

Skripta opakují základní středoškolskou látku potřebnou ke studiu matematiky na VŠCHT. Jsou věnovány následujícím partiím: úpravy výrazů, řešení rovnic a nerovnic, analytická geometrie v rovině, funkce jedné proměnné a komplexní čísla.

ISBN 978-80-7080-787-3

Předmluva

Matematika I je jedním z předmětů, jejichž úspěšné absolvování činí velké části studentů VŠCHT Praha v prvním ročníku studia značné potíže. Velmi často je to způsobeno tím, že tito studenti nemají dostatečné znalosti středoškolské matematiky, na které výuka předmětu Matematika I navazuje. Tato skripta by měla studentům pomoci odstranit tyto neznalosti. Probíraná látka je rozdělena do šesti kapitol a v žádném případě nepokrývá celé učivo středoškolské matematiky. Vybrány jsou ty partie, jejichž znalost je pro studium matematiky na VŠCHT Praha naprosto nezbytná. Skripta nemají sloužit jako samostatná učebnice, ale předpokládá se, že student se s probíranou látkou již kdysi seznámil a nyní si své dřívější znalosti potřebuje oživit a doplnit.

Obsah jednotlivých kapitol se někdy částečně překrývá a znalosti z jedné kapitoly je nutno použít v jiné. Na Kapitolu 5 - Funkce plynule navazují dalšími pojmy z teorií funkcí (monotonnost funkce, periodičnost, inverzní funkce apod.) skripta Matematika I. Proto nejsou tyto pojmy v těchto skriptech vysvětleny. Velký důraz je kladen na grafické znázornění řešených úloh. Z toho plyne i značný počet obrázků v textu.

Ve skriptech je uvedeno velké množství cvičení na probíranou látku. Samostatné vyřešení těchto cvičení je zárukou toho, že student tuto látku ovládá. V opačném případě by si měl student znovu projít text a řešené příklady a své znalosti si doplnit tak, aby byl schopen cvičení samostatně řešit.

Na začátku skript jsou uvedeny používané matematické symboly se stručným vysvětlením pojmů, které označují. Další symboly jsou pak vysvětleny přímo v textu.

Věříme, že tato skripta pomohou studentům se dobře připravit ke studiu matematiky na VŠCHT Praha.

Na závěr bychom rádi poděkovali recenzentům Mgr. Libuši Fischerové a Mgr. Mateji Maxovi, kteří nám pomohli odstranit celou řadu drobných nepřesností a jejichž cenné připomínky výrazně přispěli ke srozumitelnosti a přehlednosti skript.

Praha, červen 2011 autoři

Značení

Číselné obory.
$\mathbb{N}$ - množina přirozených čísel, tj. čísel $1, 2, 3, \ldots$ (celá kladná čísla).
$\mathbb{Z}$ - množina celých čísel, tj. čísel $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$.
$\mathbb{Q}$ -množina racionálních čísel, tj čísel, která lze zapsat ve tvaru $\frac{p}{q}$, kde p a q jsou celá čísla, $q \neq 0$.
$\mathbb{R}$ - množina reálných čísel. Ta odpovídají bodům na číselné ose.
$\mathbb{C}$ - množina komplexních čísel, tj. uspořádaných dvojic reálných čísel, viz Kapitola 6.

Intervaly. (Zde a, b označují dvě pevně zvolená reálná čísla.)
(a, b) - otevřený interval, množina reálných čísel x splňujících $a < x < b$.
$\langle a, b \rangle$ - uzavřený interval, množina reálných čísel x splňujících $a \leq x \leq b$.
$\langle a, b)$ - polouzavřený interval, množina reálných čísel x splňujících $a \leq x < b$.
$(a, b\rangle$ - polouzavřený interval, množina reálných čísel x splňujících $a < x \leq b$.
(a, ∞) - množina reálných čísel x splňujících $a < x$.
$\langle a, \infty)$ - množina reálných čísel x splňujících $a \leq x$.
$(-\infty, a)$ - množina reálných čísel x splňujících $x < a$.
$(-\infty, a\rangle$ - množina reálných čísel x splňujících $x \leq a$.
(Někdy místo (a, b) používáme $(a; b)$ atd., zejména v případech, kdy by mohlo dojít k záměně s desetinnou čárkou.)

Množinové symboly
$x \in M$ - x je prvkem množiny M.
$x \notin M$ - x není prvkem množiny M.
$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ - n prvková množina zadaná výčtem svých prvků $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
$\{x \in M \ ; \ \varphi(x)\}$ - množina těch prvků x z množiny M, které mají vlastnost φ.
Např. $\{x \in \mathbb{R} \ ; \ x < 1\} = (-\infty, 1)$.
$\emptyset$ - prázdná množina, množina neobsahující žádný prvek.
$A \subseteq B$- množina A je podmnožinou množiny B, prvky A jsou též prvky B.
$A \subsetneqq B$ - množina A je vlastní podmnožinou množiny B, $A \subseteq B$ a $B \setminus A \neq \emptyset$.
$A \setminus B$ - rozdíl množin A a B, množina prvků, které jsou prvky A a nejsou prvky B.
$A \cup B$ - sjednocení množin A a B, množina prvků, které jsou prvky A nebo prvky B.
$A \cap B$ - průnik množin A a B, množina prvků, které jsou prvky A a zároveň prvky B.
$\bigcup\limits_{i \in I} A_i$ - sjednocení množin A_i, množina prvků patřících do alespoň jedné z množin A_i, $i \in I$.
$\bigcap\limits_{i \in I} A_i$ - průnik množin A_i, množina prvků patřících do všech množin A_i, $i \in I$.
(a_1, a_2) - uspořádaná dvojice prvků a_1, a_2.
(a_1, a_2, a_3) - uspořádaná trojice prvků a_1, a_2, a_3.
$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ - uspořádaná n-tice prvků $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Logické spojky. (Zde p a q jsou výroky.)
$\wedge$ - konjunkce. $p \wedge q$ - platí p a současně platí q.
$\vee$ - disjunkce. $p \vee q$ - platí p nebo platí q.
$\Rightarrow$ - implikace. $p \Rightarrow q$ - z p plyne q.
$\Leftrightarrow$ - ekvivalence. $p \Leftrightarrow q$ - p platí právě tehdy, když platí q.

Kvantifikátory.
$\exists$ - existuje. Např. $(\exists x \in \mathbb{R})(x > 1)$ znamená: Existuje reálné číslo x, které je větší než 1.
$\forall$ - pro každé. Např. $(\forall n \in \mathbb{N})(\frac{1}{n} < 1)$ znamená: Pro každé přirozené číslo n je jeho převrácená hodnota menší než 1. (To je ovšem nepravdivý výrok.)

Obsah

Kapitola 1

Úpravy algebraických výrazů

Algebraický výraz je matematický zápis, ve kterém se vyskytují konstanty a proměnné. Je to zápis, který udává, jaké operace s konstantami a proměnnými máme provádět. Výrazem je například zápis:

$$\frac{1}{(x^5-1)^8}\,, \qquad \frac{x^2\,y-\sqrt{3-4\,x}}{x^2-5\,x-6} \quad \text{nebo} \quad \frac{x_1+x_2}{(x_3^2-1)x_4}\,.$$

Předpokládáme, že proměnných je konečný počet n. V předchozím příkladě obsahuje první výraz jednu proměnnou x, druhý výraz dvě proměnné x, y a třetí výraz čtyři proměnné x_1, x_2, x_3, x_4. Za každou proměnnou můžeme do výrazu dosazovat pouze takové hodnoty z nějaké množiny $M_i \subset \mathbb{R}$, $i = 1 \dots n$, pro které má daný výraz smysl.
Např. výraz

$$\frac{1}{(x^5-1)^8}$$

má smysl pro taková x, pro která nedostaneme ve jmenovateli zlomku 0. V tomto případě se jmenovatel nerovná 0 pro $x \neq 1$ neboli pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Uvažujeme-li výraz

$$\frac{x^2\,y-\sqrt{3-4\,x}}{x^2-5\,x-6}\,,$$

musíme určit podmínky pro dvě proměnné x, y. Tento výraz má smysl, jestliže pod odmocninou je nezáporný výraz a ve jmenovateli zlomku není 0. Musí tedy platit

$$3-4\,x \geq 0 \;\text{ a }\; x^2-5\,x-6 \neq 0\,,\; y \in \mathbb{R} \quad \text{tj.} \quad x \leq \frac{3}{4} \text{ a } x \neq 6 \text{ a } x \neq -1\,,\; y \in \mathbb{R}\,.$$

Výraz má tedy smysl pro $x \leq \frac{3}{4}$ a $x \neq -1$, $y \in \mathbb{R}$. Podobně určíme podmínky existence pro výraz s více proměnnými x_1, x_2, x_3, x_4

$$\frac{x_1+x_2}{(x_3^2-1)x_4}\,.$$

Tento výraz má smysl pro $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_2 \in \mathbb{R}$, $x_3 \neq \pm 1$ a $x_4 \neq 0$.

V kapitole 1 se naučíme upravovat algebraické výrazy a stanovit podmínky, za kterých má daný algebraický výraz smysl. Jak jsme viděli na příkladech, ve výrazech se budou objevovat zlomky, mocniny, odmocniny a mnohočleny. Zopakujeme si nejdříve pravidla pro počítání se zlomky, mocninami, odmocninami a mnohočleny.

1.1 Zlomky

Zlomkem $\dfrac{a}{b}$ rozumíme reálné číslo, které je výsledkem dělení reálného čísla a reálným číslem $b \neq 0$.

Zavedeme-li pro spojku "a" matematický symbol $\wedge$ a pro spojku "nebo" symbol $\vee$, potom pro $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ platí:

$$\frac{a}{b} > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad [(a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)]$$

$$\frac{a}{b} < 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad [(a > 0 \wedge b < 0) \vee (a < 0 \wedge b > 0)]\,,$$

kde zápis $p \Leftrightarrow q$ znamená, že tvrzení p platí právě tehdy, když platí tvrzení q.
Se zlomky můžeme provádět následující operace:

Pro $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, $d \neq 0$ platí:

$$\frac{a}{b} = \frac{k \cdot a}{k \cdot b} \quad \text{(rozšíření zlomku číslem } k \neq 0)$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a : k}{b : k} \quad \text{(krácení zlomku číslem } k \neq 0)$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a\,d + c\,b}{b\,d} \quad \text{(sčítání zlomků)}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a\,c}{b\,d} \quad \text{(násobení zlomků)}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a\,d}{b\,c}\,, \text{ pro } c \neq 0 \text{ (dělení zlomků)}$$

Příklad 1.1: Vypočtěme $\dfrac{1}{5} + \left(\dfrac{2}{6} - \dfrac{4}{15}\right)$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{5} + \left(\frac{2}{6} - \frac{4}{15}\right) &= \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{3} - \frac{4}{15}\right) = \frac{1}{5} + \frac{1 \cdot 15 - 4 \cdot 3}{3 \cdot 15} = \frac{1}{5} + \frac{3}{45} = \frac{1}{5} + \frac{1}{15} = \\ &= \frac{1 \cdot 15 + 1 \cdot 5}{5 \cdot 15} = \frac{20}{75} = \frac{4}{15}\,.\end{aligned}$$

Kdybychom při sčítání zlomků použili nejmenšího společného jmenovatale, byl by výpočet následující:

$$\frac{1}{5} + \left(\frac{2}{6} - \frac{4}{15}\right) = \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{3} - \frac{4}{15}\right) = \frac{1}{5} + \frac{1 \cdot 5 - 4 \cdot 1}{15} = \frac{1}{5} + \frac{1}{15} = \frac{1 \cdot 3 + 1 \cdot 1}{15} = \frac{4}{15}.$$

☺

Příklad 1.2: Vypočtěme $\left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2}\right) : \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{6}\right)$.

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) : \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) = \frac{1 \cdot 2 + 1 \cdot 3}{6} : \frac{1 \cdot 2 - 1}{6} = \frac{5}{6} : \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{1} = \frac{5}{1} = 5.$$

☺

Příklad 1.3: Vypočtěme $\frac{1}{a} + \frac{2\,a}{3}$, kde $a \neq 0$.

$\frac{1}{a} + \frac{2\,a}{3} = \frac{1 \cdot 3 + 2\,a \cdot a}{3 \cdot a} = \frac{3 + 2\,a^2}{3\,a}$. ☺

1.2 Mocniny a odmocniny

Mocnina je zkrácený zápis pro součin stejných činitelů. Např. mocnina 3^5 znamená $3{\cdot}3{\cdot}3{\cdot}3{\cdot}3$. Obecně platí:

Pro $a \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ definujme $n-$tou mocninu čísla a:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-\text{krát}} \in \mathbb{R}$$

Pro $n = 0$ a $a \neq 0$ definujme $a^0 = 1$.

a nazýváme základ mocniny, n exponent.
Nyní rozšíříme definici mocniny i pro záporný exponent:

Pro $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a $n \in \mathbb{N}$ definujme $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Uvedeme si důležité vlastnosti mocnin:

Pro $a, b \in \mathbb{R},\ n, m \in \mathbb{N}$ platí:

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
2. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ pro $a \neq 0$
3. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
4. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ pro $b \neq 0$

Příklad 1.4: Zjednodušme výraz $\left(\frac{a^5\,b^3}{a^2\,b^4}\right)^3$; $a \neq 0,\ b \neq 0$.

$\left(\frac{a^5\,b^3}{a^2\,b^4}\right)^3 = \left(a^{5-2}\,b^{3-4}\right)^3 = \left(a^3\,b^{-1}\right)^3 = a^{3\cdot 3}\,b^{(-1)\cdot 3} = a^9\,b^{-3} = \frac{a^9}{b^3}$.

Jiný postup:

$\left(\frac{a^5\,b^3}{a^2\,b^4}\right)^3 = \frac{a^{5\cdot 3}\,b^{3\cdot 3}}{a^{2\cdot 3}\,b^{4\cdot 3}} = \frac{a^{15}\,b^9}{a^6\,b^{12}} = a^{15-6}b^{9-12} = a^9\,b^{-3} = \frac{a^9}{b^3}$.

☺

• Odmocnina je definována následovně:

Pro $a \in \langle 0, \infty)$, $b \in \langle 0, \infty)$ a $n \in \mathbb{N}$ definujme $n-$tou odmocninu čísla a vztahem

$$\sqrt[n]{a} \;=\; b \qquad \Leftrightarrow \qquad b^n \;=\; a$$

Pokud jsou n pouze lichá čísla, můžeme definovat odmocnimu i ze záporného čísla.

Pro $a \in (-\infty, 0\rangle$ a $n \in \mathbb{N}$, liché definujme $n-$tou odmocninu čísla a jako

$$\sqrt[n]{a} \;=\; -\sqrt[n]{-a}$$

Číslo a nazýváme základ odmocniny, n odmocnitel.

• Vlastnosti odmocnin:

Pro $a, b \in \langle 0, \infty)$, $n, m, p \in \mathbb{N}$ platí:

1. $\sqrt[n]{a \cdot b} \;=\; \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} \;=\; \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ pro $b \neq 0$
3. $(\sqrt[n]{a})^m \;=\; \sqrt[n]{a^m}$
4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} \;=\; \sqrt[m \cdot n]{a}$
5. $\sqrt[m \cdot n]{a^{m \cdot p}} \;=\; \sqrt[n]{a^p}$

• Definujme nyní $r-$tou mocninu čísla a pro r racionální.

Pro $a \in (0, \infty)$ a $r \in \mathbb{Q}$ ($r = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$) definujme:

$$a^r \;=\; a^{\frac{p}{q}} \;=\; \sqrt[q]{a^p}$$

Pro $r, s \in \mathbb{Q}$ a $a, b \in (0, \infty)$ platí:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}\,, \quad (a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r\,, \quad (a^r)^s = a^{r \cdot s}\,.$$

Příklad 1.5: Zjednodušme výraz $\sqrt[6]{a^8 \cdot b^3}\,,\quad a, b \geq 0.$

$\sqrt[6]{a^8 \cdot b^3} = \sqrt[6]{a^8} \cdot \sqrt[6]{b^3} = \sqrt[3]{a^4} \cdot \sqrt{b}\,.$

Nebo jinak:

$\sqrt[6]{a^8 \cdot b^3} = (a^8 \cdot b^3)^{\frac{1}{6}} = a^{\frac{8}{6}} \cdot b^{\frac{3}{6}} = a^{\frac{4}{3}} \cdot b^{\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{a^4} \cdot \sqrt{b}\,.$ ☺

Příklad 1.6: Zjednodušme výraz $\sqrt[3]{\sqrt{a} \cdot \sqrt[5]{a \cdot b}}\,,\quad a, b \geq 0.$

$$\sqrt[3]{\sqrt{a}\cdot\sqrt[5]{a\cdot b}}=\sqrt[3]{\sqrt{a}\cdot\sqrt[5]{a}\cdot\sqrt[5]{b}}=\sqrt[3]{a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{5}}\cdot\sqrt[5]{b}}=\sqrt[3]{a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}\cdot\sqrt[5]{b}}=\sqrt[3]{a^{\frac{7}{10}}\cdot\sqrt[5]{b}}=$$

$$=\sqrt[3]{\sqrt[10]{a^7}\cdot\sqrt[5]{b}}=\sqrt[30]{a^7}\cdot\sqrt[15]{b}\,.$$

Nebo jinak:

$$\sqrt[3]{\sqrt{a}\cdot\sqrt[5]{a\cdot b}}=\left(a^{\frac{1}{2}}\cdot(a\cdot b)^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{6}}\cdot(a\cdot b)^{\frac{1}{15}}=a^{\frac{1}{6}}\cdot a^{\frac{1}{15}}\cdot b^{\frac{1}{15}}=a^{\frac{1}{6}+\frac{1}{15}}\cdot b^{\frac{1}{15}}=$$

$$=a^{\frac{7}{30}}\cdot b^{\frac{1}{15}}=\sqrt[30]{a^7}\cdot\sqrt[15]{b}\,.$$

☺

Cvičení

Cvičení 1.1: Zjednodušte výrazy:

a) $\dfrac{a}{3}+\dfrac{9}{a^2}\cdot\dfrac{a}{3}-\left(\dfrac{3}{a}-\dfrac{a}{3}\right);\ a\neq 0\,,$

b) $\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right):\dfrac{x^2+y^2}{x}-\dfrac{x}{y};\ x\neq 0,\ y\neq 0\,,$

c) $\dfrac{a^6\,b^4\,c^2}{a^2\,c^3}:\dfrac{a\,b^5\,c}{b\,c};\ a,\ b,\ c\neq 0\,,$

d) $\dfrac{x\,y^2+x\,z^2}{x^2\,y\,z}-\dfrac{z}{x\,y}+\dfrac{y}{x\,z};\ x,\ y,\ z\neq 0\,,$

e) $\left(\dfrac{u\,v^2}{w}\right)^2:\left(\dfrac{v}{w\,u}\right)^3;\ u,\ v,\ w\neq 0\,,$

f) $\left(a^{-1}\,b^2\,c^{-2}\right)^3\left(a^{-2}\,b^{-1}\,c^{-3}\right)^{-2};\ a,\ b,\ c\neq 0\,,$

g) $\dfrac{x^{\frac{1}{3}}\,x^{\frac{1}{2}}\,x^{-\frac{1}{6}}}{x};\ x>0\,,$

h) $\dfrac{\left(x^{\frac{1}{2}}\,y^5\right)^{\frac{1}{5}}}{\left(x^{-\frac{1}{5}}\,y^3\right)^{\frac{1}{2}}};\ x,\ y>0\,.$

Cvičení 1.2: Zjednodušte výrazy:

a) $\dfrac{\sqrt[3]{a}\,\sqrt{a}}{a^2};\ a>0\,,$

b) $\left(\sqrt[4]{x^3}\,\sqrt[6]{x}\right)^3;\ x\geq 0\,,$

c) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{u^6}\,\sqrt[5]{u}};\ u\geq 0\,,$

d) $\left(\sqrt[3]{\sqrt[6]{\sqrt[4]{x^8}}}\right)^3;\ x\geq 0\,.$

1.3 Mnohočleny

Zvláštním případem výrazů jsou mnohočleny. Mnohočleny mohou být s jednou proměnnou, např. x^2-2x+1, nebo více proměnnými, např. $x^2y+x\,y^2z$. Pravidla pro počítání s mnohočleny si uvedeme pro mnohočleny s jednou proměnnou. Je jednoduché zobecnit tato pravidla pro mnohočleny s více proměnnými. Ukážeme si to na příkladech.

Nechť $x\in\mathbb{R}$ je proměnná, $n\in\mathbb{N}$ a $a_0,a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R},\ a_n\neq 0$ jsou dané konstanty.

Výraz

$$P(x)\ =\ a_n\,x^n\ +\ a_{n-1}\,x^{n-1}\ +\ \ldots\ +\ a_1\,x\ +\ a_0$$

nazýváme **reálným mnohočlenem (polynomem)** $n-$**tého stupně** v proměnné x.

Čísla $a_0, a_1, \ldots, a_n$ nazýváme koeficienty mnohočlenu, výraz $a_i\, x^i$, $i = 1 \ldots n$ člen mnohočlenu stupně i a a_0 nazýváme absolutní člen.

1.3.1 Pravidla pro počítání s mnohočleny

• **Rovnost mnohočlenů**
Dva mnohočleny $P(x)$ a $Q(x)$ se rovnají právě tehdy, když se rovnají členy stejného stupně, neboli když se rovnají koeficienty u stejných mocnin x.

• **Sčítání a odčítání mnohočlenů**
Mnohočleny sčítáme, resp. odčítáme tak, že sečteme, resp. odečteme členy stejného stupně, neboli sečteme (resp. odečteme) koeficienty u stejných mocnin x.

Příklad 1.7: Sečtěme dva mnohočleny
$P(x) = x^4 + 3\,x^3 - 5\,x^2 + 2$ a $Q(x) = 2\,x^3 - x^2 + 5\,x - 1$.

$$\begin{aligned} P(x) + Q(x) &= (1+0)\,x^4 + (3+2)\,x^3 + (-5-1)\,x^2 + (0+5)\,x + (2-1) = \\ &= x^4 + 5\,x^3 - 6\,x^2 + 5\,x + 1\,. \end{aligned}$$

☺

Nyní si ukážeme zobecnění pro mnohočleny s více proměnnými.

Příklad 1.8: Sečtěme dva mnohočleny
$P(x,y) = x^2y + 2\,x^2 - 3\,x\,y + 5\,y$ a $Q(x,y) = 2\,x^2y - x\,y + 2\,x - 1$.

$$\begin{aligned} P(x,y) + Q(x,y) &= (1+2)x^2y + 2\,x^2 + (-3-1)x\,y + 2\,x + 5\,y - 1 = \\ &= 3\,x^2y + 2\,x^2 - 4\,x\,y + 2\,x + 5\,y - 1\,. \end{aligned}$$

☺

• **Násobení mnohočlenů**
Mnohočlen násobíme mnohočlenem tak, že všechny členy prvního mnohočlenu vynásobíme každým členem druhého mnohočlenu a vzniklé součiny sečteme.

Příklad 1.9: Vynásobme dva mnohočleny
$P(x) = x^3 - 2$ a $Q(x) = 2\,x^2 + 3\,x - 1$.

$$\begin{aligned} P(x) \cdot Q(x) &= (x^3 - 2) \cdot (2\,x^2 + 3\,x - 1) = \\ &= x^3 \cdot 2\,x^2 + x^3 \cdot 3\,x + x^3 \cdot (-1) + (-2) \cdot 2\,x^2 + (-2) \cdot 3\,x + (-2) \cdot (-1) = \\ &= 2\,x^5 + 3\,x^4 - x^3 - 4\,x^2 - 6\,x + 2\,. \end{aligned}$$

☺

Příklad 1.10: Vynásobme dva mnohočleny
$P(x,y) = x^2y - x$ a $Q(x,y) = x^2 + 3\,y$.

$$\begin{aligned} P(x,y) \cdot Q(x,y) &= (x^2y - x) \cdot (x^2 + 3\,y) = x^2y \cdot x^2 + x^2y \cdot 3\,y + (-x) \cdot x^2 + (-x) \cdot 3\,y = \\ &= x^4y + 3\,x^2y^2 - x^3 - 3\,x\,y\,. \end{aligned}$$

☺

• Dělení mnohočlenů
Předpokládejme, že dělený mnohočlen (dělenec) $P(x)$ je stupně $n \geq 1$ a dělící mnohočlen (dělitel) $Q(x)$ má stupeň $m \leq n$. Postup dělení můžeme rozepsat do několika bodů:

1. Oba mnohočleny uspořádáme sestupně podle mocniny proměnné.

2. Člen dělence s nejvyšším stupněm dělíme členem dělitele s nejvyšším stupněm, výsledek dělení je první člen hledaného podílu.

3. Prvním členem podílu vynásobíme dělitele a výsledek zapíšeme pod dělenec (stejné mocniny pod sebe) a odečteme. Rozdíl je opět mnohočlen.

4. Celý postup opakujeme pro tento nový mnohočlen. Jestliže rozdíl má stupeň menší než dělitel, dělení ukončíme a rozdíl prohlásíme za zbytek po dělení.

Celý postup si ukážeme na následujícím příkladě.

Příklad 1.11: Vydělme dva mnohočleny
$P(x) = x^4 + 2\,x^3 + 4\,x^2 + 2\,x + 3 \quad$ a $\quad Q(x) = x^2 + 1$.

$$\begin{array}{rrrrrl}
(x^4 & +2\,x^3 & +4\,x^2 & +2\,x & +3\,) & :(x^2+1) = x^2 + 2\,x + 3 \\
-(x^4 & & +x^2) & & & \\
\cline{1-3}
 & 2\,x^3 & +3\,x^2 & +2\,x & +3 & \\
 & -(2\,x^3 & & +2\,x) & & \\
\cline{2-4}
 & & 3\,x^2 & & +3 & \\
 & & -(3\,x^2 & & +3) & \\
\cline{3-5}
 & & & & 0 &
\end{array}$$

Výsledek: $P(x) : Q(x) \; = \; x^2 + 2\,x + 3\,.$

Zkouška: $(x^2+2\,x+3)\cdot(x^2+1) \; = \; x^4+x^2+2\,x^3+2\,x+3\,x^2+3 \; = \; x^4+2\,x^3+4\,x^2+2\,x+3\,.$

☺

Příklad 1.12: Vydělme dva polynomy
$P(x) = 2\,x^5 + x^4 - 3\,x^2 - 4\,x + 5 \quad$ a $\quad Q(x) = x^2 + x - 1$.

$$\begin{array}{rrrrrrl}
(2\,x^5 & +x^4 & & -3\,x^2 & -4\,x & +5\,) & :(x^2+x-1) = 2\,x^3 - x^2 + 3\,x - 7 \\
-(2\,x^5 & +2\,x^4 & -2\,x^3) & & & & \\
\cline{1-3}
 & -x^4 & +2\,x^3 & -3\,x^2 & -4\,x & +5 & \\
 & -(-x^4 & -x^3 & +x^2) & & & \\
\cline{2-4}
 & & 3\,x^3 & -4\,x^2 & -4\,x & +5 & \\
 & & -(3\,x^3 & +3\,x^2 & -3\,x) & & \\
\cline{3-5}
 & & & -7\,x^2 & -x & +5 & \\
 & & & -(-7\,x^2 & -7\,x & +7) & \\
\cline{4-6}
 & & & & 6\,x & -2 &
\end{array}$$

Zbytek po dělení je $6\,x - 2$.
Výsledek: $P(x) : Q(x) = 2\,x^3 - x^2 + 3\,x - 7 + \dfrac{6\,x - 2}{x^2 + x - 1}\,.$

Zkouška:

$$\left(2\,x^3 - x^2 + 3\,x - 7 + \frac{6\,x-2}{x^2+x-1}\right)\cdot(x^2+x-1) \;=$$

$$= \;(2\,x^3 - x^2 + 3\,x - 7)\cdot(x^2+x-1) + \frac{6\,x-2}{x^2+x-1}\cdot(x^2+x-1) \;=$$

$$= \;2\,x^5 + 2\,x^4 - 2\,x^3 - x^4 - x^3 + x^2 + 3\,x^3 + 3\,x^2 - 3\,x - 7\,x^2 - 7\,x + 7 + 6\,x - 2 \;=$$

$$= \;2\,x^5 + x^4 - 3\,x^2 - 4\,x + 5.$$

☺

1.3.2 Umocňování a rozklad mnohočlenů na součin

• Vzorce pro umocňování dvojčlenů, binomické vzorce:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2\,a\,b + b^2 & \qquad (a-b)^2 &= a^2 - 2\,a\,b + b^2\\ (a+b)^3 &= a^3 + 3\,a^2 b + 3a\,b^2 + b^3 & \qquad (a-b)^3 &= a^3 - 3\,a^2 b + 3a\,b^2 - b^3\end{aligned}$$

Obecný binomický rozvoj:

$$(a+b)^n \;=\; \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}\,b^k,\ \text{kde } n\in\mathbb{N},\ \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

Zde $n!$ (čti n faktoriál) je definováno následovně $0! = 1$, $1! = 1$ a pro $n > 1$ je $n! = n\cdot(n-1)! = n\cdot(n-1)\cdots 2\cdot 1$.

Příklad 1.13: Umocněme dvojčlen $(x-2)^5$.

$$\begin{aligned}(x-2)^5 &= x^5 + \binom{5}{1}x^4(-2) + \binom{5}{2}x^3(-2)^2 + \binom{5}{3}x^2(-2)^3 + \binom{5}{4}x\,(-2)^4 + (-2)^5 \;=\\ &= x^5 + \frac{5!}{1!4!}x^4\cdot(-2) + \frac{5!}{2!3!}x^3\cdot 4 + \frac{5!}{3!2!}x^2\cdot(-8) + \frac{5!}{4!1!}x\cdot 16 + (-32) \;=\\ &= x^5 + 5\,x^4\cdot(-2) + 10\,x^3\cdot 4 + 10\,x^2\cdot(-8) + 5\,x\cdot 16 + (-32) \;=\\ &= x^5 - 10\,x^4 + 40\,x^3 - 80\,x^2 + 80\,x - 32\,.\end{aligned}$$

☺

• Rozklad mnohočlenů na součin:

$$\begin{aligned}a^2 - b^2 &= (a-b)\,(a+b)\\ a^3 - b^3 &= (a-b)\,(a^2 + a\,b + b^2)\\ a^3 + b^3 &= (a+b)\,(a^2 - a\,b + b^2)\\ a^n - b^n &= (a-b)\,(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + a\,b^{n-2} + b^{n-1})\,,\ n\in\mathbb{N}\\ a^n + b^n &= (a+b)\,(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots - a\,b^{n-2} + b^{n-1})\,,\ n\in\mathbb{N}\ \text{liché}\end{aligned}$$

Příklad 1.14: Rozložme mnohočlen $(27\,x^3 - 8)$.

$$(27\,x^3 - 8) \;= (3\,x)^3 - 2^3 = (3\,x-2)\,((3\,x)^2 + 3\,x\cdot 2 + 2^2) = (3\,x-2)\,(9\,x^2 + 6\,x + 4)\,.$$

☺

• Rozklad kvadratického trojčlenu na součin kořenových činitelů:

Nechť $a, b, c \in \mathbb{R},\ b^2 - 4\,a\,c \geq 0$, potom

$$a\,x^2 + b\,x + c = a\,(x - x_1)(x - x_2),$$

kde x_1, x_2 jsou kořeny kvadratické rovnice $a\,x^2 + b\,x + c = 0$.
Převedeme-li rovnici $ax^2 + bx + c = 0$ na ekvivalentní normovaný tvar

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0\,, \qquad \text{tj.} \qquad x^2 + px + q = 0,$$

platí tzv. Viètovy vzorce:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -p \\ x_1 \cdot x_2 &= q. \end{aligned}$$

Čísla x_1, x_2 lze v některých případech uhádnout, většinou je ale určíme jako kořeny kvadratické rovnice (viz kapitola 2).

Příklad 1.15: Rozložme kvadratický trojčlen $(x^2 - 6\,x - 16)$ na součin kořenových činitelů.

$p = -6\,,\ q = -16\,,\ p^2 - 4\,q = 36 + 66 = 100 \geq 0$

$$\left.\begin{aligned} x_1\,x_2 &= -16 \\ x_1 + x_2 &= 6 \end{aligned}\right\} \quad \text{odtud } x_1 = 8 \qquad x_2 = -2 \quad \text{(zde jsme čísla uhodli)}$$

Čísla x_1, x_2 můžeme získat také řešením kvadratické rovnice $x^2 - 6\,x - 16 = 0$, tedy

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4(-16)}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{6 \pm 10}{2} = \begin{cases} 8 \\ -2 \end{cases}.$$

$(x^2 - 6\,x - 16) = (x - x_1)(x - x_2) = (x - 8)(x + 2)\,.$ ☺

• Doplnění kvadratického trojčlenu na čtverec (na úplnou druhou mocninu):

$$x^2 + p\,x + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q\,,\ \text{kde } p, q \in \mathbb{R}\,. \tag{1.1}$$

Tuto úpravu budeme často využívat.

Příklad 1.16: Doplňme kvadratický trojčlen $(x^2 + 5\,x + 7)$ na čtverec.

$p = 5\,,\ q = 7\,,$
$(x^2 + 5\,x + 7) = (x + \frac{5}{2})^2 - \frac{25}{4} + 7 = (x + \frac{5}{2})^2 + \frac{3}{4}\,.$ ☺

Příklad 1.17: Doplňme kvadratický trojčlen $(2\,x^2 + 3\,x + 2)$ na čtverec.

$(2\,x^2 + 3\,x + 2) = 2\,(x^2 + \frac{3}{2}x + 1)$
$p = \frac{3}{2}\,,\ q = 1\,,$
$$\begin{aligned}(2\,x^2 + 3\,x + 2) &= 2\,(x^2 + \tfrac{3}{2}x + 1) = 2\left((x + \tfrac{3}{4})^2 - \tfrac{9}{16} + 1\right) = 2\left((x + \tfrac{3}{4})^2 + \tfrac{7}{16}\right) = \\ &= 2\,(x + \tfrac{3}{4})^2 + \tfrac{7}{8}.\end{aligned}$$ ☺

Příklad 1.18: Doplňme výraz $(-3x^2 + 5x)$ na čtverec.

$$(-3x^2 + 5x) \;=\; -3\,(x^2 - \tfrac{5}{3}x)$$
$$p \;=\; -\tfrac{5}{3}\,,\; q \;=\; 0\,,$$
$$(-3x^2 + 5x) \;=\; -3\,(x^2 - \tfrac{5}{3}x) \;=\; -3\left((x - \tfrac{5}{6})^2 - \tfrac{25}{36}\right) \;=\; -3\,(x - \tfrac{5}{6})^2 + \tfrac{75}{36}.$$

☺

Příklad 1.19: Doplňme kvadratický trojčlen $(\frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{5}{2})$ na čtverec.

$$(\tfrac{1}{2}x^2 - 3x + \tfrac{5}{2}) \;=\; \tfrac{1}{2}\,(x^2 - 6x + 5)$$
$$p \;=\; -6\,,\; q \;=\; 5\,,$$
$$(\tfrac{1}{2}x^2 - 3x + \tfrac{5}{2}) \;=\; \tfrac{1}{2}\,(x^2 - 6x + 5) \;=\; \tfrac{1}{2}\left((x - 3)^2 - 9 + 5\right) \;=\; \tfrac{1}{2}\,(x - 3)^2 - 2.$$

☺

Cvičení

Cvičení 1.3: Vydělte polynomy $P(x)$ a $Q(x)$ a proveďte zkoušku.

a) $P(x) = x^3 - 4x^2 + 7x - 4$, $Q(x) = x - 1$,

b) $P(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + x - 3$, $Q(x) = x^2 + 1$,

c) $P(x) = x^6 - 2x^5 + 4x^4 + x^3 - 7x^2 + 9x - 5$, $Q(x) = x^2 - x + 1$,

d) $P(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 7x + 1$, $Q(x) = x + 3$,

e) $P(x) = x^6 - 3x^5 + 4x^3 + 4x^2 + 2x - 1$, $Q(x) = x^2 - 3x + 3$,

f) $P(x) = x^6 + x^5 - 4x^4 + 5x^3 + 2x^2 + x - 1$, $Q(x) = x^2 + x$,

g) $P(x) = x^7 + 3x^6 + x^5 - 2x^3 + 5x^2 - 2x - 2$, $Q(x) = x^3 + 2x^2 - 2x + 1$.

Cvičení 1.4: Umocňete dvojčleny:

a) $(a+2)^3$, **b)** $(x-1)^4$, **c)** $(2\,b+1)^3$,

d) $(5\,x+2)^2$, **e)** $(2\,y-1)^4$, **f)** $(2\,a+\frac{1}{2})^5$.

Cvičení 1.5: Rozložte mnohočleny na součin:

a) $x^2 - 4$, **b)** $x^3 + 8$, **c)** $a^3 - 27$,

d) $\dfrac{a^2}{4} - 16\,b^2$, **e)** $\dfrac{x^3}{8} - \dfrac{y^3}{64}$, **f)** $x^4 - y^2$,

g) $a^4 - b^4$, **h)** $x^5 + y^5$, **i)** $(x+y)^3 - (x-y)^3$,

j) $(x+3)^2 - (x-2)^2$, **k)** $(a+b)^3 - b^3$, **l)** $(x-2)^4 - (x+4)^4$.

Cvičení 1.6: Rozložte kvadratické trojčleny (resp. trojčleny vyšších řádů) na součin:

a) $x^2 - 4x - 5$, **b)** $x^2 - 5x + 6$, **c)** $x^2 - \dfrac{x}{6} - \dfrac{1}{6}$,

d) $6x^2 - x - 1$, **e)** $x^4 + 2x^2 + 1$, **f)** $x^6 + x^3 - 2$.

Cvičení 1.7: Doplňte na čtverce:

a) $a^2 - 2\,a + 2$, **b)** $x^2 + 4\,x + 5$, **c)** $u^2 + u - 1$,

d) $2\,x^2 - 4\,x + 6$, **e)** $3\,b^2 + b + 3$, **f)** $x^4 - 2\,x^2 + 2$.

1.4 Lomené algebraické výrazy

Lomený algebraický výraz je výraz ve tvaru zlomku.

$$\text{lomený výraz} = \frac{V_1}{V_2},$$

kde V_1, V_2 jsou výrazy, $V_2 \neq 0$.

S lomeným výrazem pracujeme jako se zlomkem, musíme tedy dávat pozor, kdy je jmenovatel zlomku roven 0. Lomený výraz má smysl, když mají smysl jednotlivé výrazy V_1, V_2 a výraz V_2 je různý od 0.
Zopakujme si pojem společný dělitel a společný násobek pro mnohočleny.

Společný dělitel mnohočlenů P_1, P_2 je mnohočlen, kterým je každý z mnohočlenů P_1, P_2 beze zbytku dělitelný.
Největší společný dělitel mnohočlenů je společný dělitel nejvyššího stupně.
Společný násobek mnohočlenů P_1, P_2 je mnohočlen, který je každým mnohočlenem P_1, P_2 beze zbytku dělitelný.
Nejmenší společný násobek mnohočlenů je společný násobek nejnižšího stupně.

Příklad 1.20: Určeme nejmenší společný násobek a největší společný dělitel mnohočlenů $P_1 = 6(x^2 - 1)$ a $P_2 = 3(x - 1)^2$.

Rozložíme nejprve oba mnohočleny na součin:
$P_1 = 3 \cdot 2 \cdot (x - 1)\,(x + 1)$ a $P_2 = 3(x - 1)\,(x - 1)$
Největším společným dělitelem je mnohočlen $P = 3(x - 1)$, protože P dělí beze zbytku P_1 i P_2 a ze všech společných dělitelů má nejvyšší stupeň.
Nejmenším společným násobkem je mnohočlen $Q = 6(x-1)(x+1)(x-1) = 6(x^2-1)(x-1)$, protože mnohočleny P_1 i P_2 dělí beze zbytku mnohočlen Q a ze všech společných násobků má nejmenší stupeň. ☺

• Krátit lomený výraz znamená dělit jeho čitatel i jmenovatel stejným výrazem. Rozšířit lomený výraz znamená násobit jeho čitatel i jmenovatel stejným výrazem.

Krácení a rozšíření lomených výrazů

$$\frac{V_1 \cdot V}{V_2 \cdot V} = \frac{V_1}{V_2},$$

kde V_1, V_2, V jsou výrazy, $V_2, V \neq 0$.

Příklad 1.21: Upravme lomený výraz

$$\frac{8\,(a^2 - 1)(a + 1)\,b^4}{4\,(a + 1)^2\,b^3}.$$

Jmenovatel lomeného výrazu musí být různý od nuly

$$4\,(a + 1)^2\,b^3 \neq 0, \quad \text{tedy} \quad a + 1 \neq 0 \ \wedge\ b \neq 0\,.$$

Daný výraz má smysl pro všechna $a \neq -1$ a $b \neq 0$. Za těchto předpokladů platí:

$$\frac{8\,(a^2-1)(a+1)\,b^4}{4\,(a+1)^2\,b^3} = \frac{8\,(a-1)(a+1)(a+1)\,b^4}{4\,(a+1)(a+1)\,b^3} = 2\,(a-1)\,b\,.$$

☺

Příklad 1.22: Upravme lomený výraz

$$\frac{\dfrac{2\,(x+1)}{x-1}}{\dfrac{5\,x}{x-1}}\,.$$

Jmenovatelé všech lomených výrazů musí být nenulové

$$(x-1) \neq 0 \;\wedge\; \frac{5\,x}{x-1} \neq 0, \quad \text{tedy} \quad x \neq -1 \;\wedge\; x \neq 0\,.$$

Daný výraz má smysl pro všechna $x \neq -1$ a $x \neq 0$. Za těchto předpokladů platí:

$$\frac{\dfrac{2\,(x+1)}{x-1}}{\dfrac{5\,x}{x-1}} = \frac{2\,(x+1)}{x-1} : \frac{5\,x}{x-1} = \frac{2\,(x+1)}{x-1} \cdot \frac{x-1}{5\,x} = \frac{2\,(x+1)}{5\,x}\,.$$

☺

• Při sčítání lomených výrazů převedeme lomené výrazy na společného jmenovatele.

Sčítání lomených výrazů

$$\frac{V_1}{V_2} + \frac{V_3}{V_4} = \frac{V_1\,V_4 + V_2\,V_3}{V_2\,V_4}\,,$$

kde V_1, V_2, V_3, V_4 jsou výrazy, $V_2, V_4 \neq 0$.

Obvykle používáme nejmenšího společného jmenovatele.

Příklad 1.23: Sečtěme lomené výrazy:

$$\frac{x+2\,y}{2\,(x+y)} + \frac{x\,y}{x-y}\,.$$

Daný výraz má smysl pro $x \neq \pm y$.

$$\begin{aligned}
\frac{x+2\,y}{2\,(x+y)} + \frac{x\,y}{x-y} &= \frac{(x+2\,y)\,(x-y) + x\,y\cdot 2\,(x+y)}{2\,(x+y)\,(x-y)} = \\
&= \frac{x^2 - x\,y + 2\,y\,x - 2\,y^2 + 2\,x^2\,y + 2\,x\,y^2}{2(x^2-y^2)} = \\
&= \frac{x^2 + x\,y - 2\,y^2 + 2\,x^2\,y + 2\,x\,y^2}{2(x^2-y^2)} = \\
&= \frac{2\,x^2\,y + 2\,x\,y^2 + x^2 - 2\,y^2 + x\,y}{2(x^2-y^2)}\,.
\end{aligned}$$

Poslední úprava je jen setřídění členů mnohočlenu podle nejvyšší mocniny. ☺

Příklad 1.24: Sečtěme lomené výrazy:

$$\frac{x+y}{x} - \frac{x}{x-y} + \frac{y^2}{x^2 - x\,y}\,.$$

Daný výraz má smysl pro $x \neq y$ a $x \neq 0$. S využitím nejmenšího společného jmenovatele dostaneme:

$$\frac{x+y}{x} - \frac{x}{x-y} + \frac{y^2}{x^2 - x\,y} \;=\; \frac{(x+y)\,(x-y) - x^2 + y^2}{x\,(x-y)} \;=\; \frac{(x^2-y^2) - x^2 + y^2}{x\,(x-y)} \;=\; 0\,.$$

☺

• Při násobení lomených výrazů vynásobíme čitatel s čitatelem a jmenovatel s jmenovatelem.

Násobení lomených výrazů

$$\frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{V_3}{V_4} = \frac{V_1 \cdot V_3}{V_2 \cdot V_4}\,,$$

kde V_1, V_2, V_3, V_4 jsou výrazy, $V_2, V_4 \neq 0$.

Příklad 1.25: Vynásobme lomené výrazy:

$$\frac{a+b}{a\,b} \cdot \frac{a-b}{2\,a\,b} \cdot \frac{a\,b}{a^2-b^2}\,.$$

Daný výraz má smysl pro $a \neq \pm b$ a $a, b \neq 0$.

$$\frac{a+b}{a\,b} \cdot \frac{a-b}{2\,a\,b} \cdot \frac{a\,b}{a^2-b^2} \;=\; \frac{(a^2-b^2)\,a\,b}{2\,a^2 b^2\,(a^2-b^2)} \;=\; \frac{1}{2\,a\,b}\,.$$

☺

• Při umocňování lomeného výrazu umocníme jeho čitatel i jmenovatel.

Umocňování lomených výrazů ($k \in \mathbb{Z}$)

$$\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^k = \frac{V_1^k}{V_2^k}\,,$$

kde V_1, V_2 jsou výrazy, $V_2 \neq 0$, v případě $k < 0$ i $V_1 \neq 0$.

Příklad 1.26: Umocněme lomený výraz:

$$\left(\frac{x+y}{x^2\,y^3}\right)^2\,.$$

Daný výraz má smysl pro $x, y \neq 0$.

$$\left(\frac{x+y}{x^2\,y^3}\right)^2 \;=\; \frac{(x+y)^2}{(x^2\,y^3)^2} \;=\; \frac{(x+y)^2}{x^4\,y^6}\,.$$

☺

Dělení lomených výrazů

$$\frac{V_1}{V_2} : \frac{V_3}{V_4} = \frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{V_4}{V_3}\,,$$

kde V_1, V_2, V_3, V_4 jsou výrazy, $V_2, V_3, V_4 \neq 0$.

Příklad 1.27: Podělme lomený výraz:

$$\frac{x^3 - x\,y^4}{x+y} : \frac{(x-y^2)\,x^2\,y}{x^2-y^2}\,.$$

Pro daný výraz musí platit:

$$\Big(x+y\neq 0 \;\wedge\; (x-y^2)\,x^2\,y\neq 0 \;\wedge\; x^2-y^2\neq 0\Big) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \Big(x\neq -y \;\wedge\; x\neq y^2 \;\wedge\; x^2y\neq 0 \;\wedge\; x^2\neq y^2\Big) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \Big(x\neq -y \;\wedge\; x\neq y^2 \;\wedge\; x\neq 0 \;\wedge\; y\neq 0 \;\wedge\; |x|\neq |y|\Big).$$

Daný výraz má tedy smysl pro $x\neq y^2$, $x\neq \pm y$ a $x, y\neq 0$.
Výraz upravíme:

$$\begin{aligned}\frac{x^3 - x\,y^4}{x+y} : \frac{(x-y^2)\,x^2\,y}{x^2-y^2} &= \frac{x(x^2-y^4)}{x+y}\cdot\frac{x^2-y^2}{(x-y^2)\,x^2\,y} = \frac{x(x-y^2)(x+y^2)(x-y)(x+y)}{(x+y)(x-y^2)\,x^2\,y}\\ &= \frac{(x+y^2)(x-y)}{x\,y}\,.\end{aligned}$$

☺

Zjednodušení složeného lomeného výrazu

$$\frac{\dfrac{V_1}{V_2}}{\dfrac{V_3}{V_4}} = \frac{V_1}{V_2}\cdot\frac{V_4}{V_3}\,,$$

kde V_1, V_2, V_3, V_4 jsou výrazy, $V_2, V_3, V_4 \neq 0$.

Příklad 1.28: Zjednodušme složený lomený výraz:

$$\frac{\dfrac{(u^2-v^2)}{u^3(v+1)^5}}{\dfrac{(u+v)^2}{(v+1)^3v^2}}\,.$$

Pro daný výraz musí platit:

$(u^3(v+1)^5\neq 0 \;\wedge\; (v+1)^3v^2\neq 0 \;\wedge\; (u+v)^2\neq 0)$ tj. $(v\neq -1 \;\wedge\; u\neq 0 \;\wedge\; v\neq 0 \;\wedge\; u\neq -v)$.

Daný výraz má tedy smysl pro $u \neq -v$, $v \neq -1$ a $u, v \neq 0$.
Výraz zjednodušíme:

$$\frac{\dfrac{(u^2-v^2)}{u^3(v+1)^5}}{\dfrac{(u+v)^2}{(v+1)^3v^2}} = \frac{(u^2-v^2)}{u^3(v+1)^5} \cdot \frac{(v+1)^3v^2}{(u+v)^2} = \frac{(u-v)(u+v)}{u^3(v+1)^5} \cdot \frac{(v+1)^3v^2}{(u+v)^2} =$$

$$= \frac{(u-v)\,v^2}{(v+1)^2(u+v)\,u^3}\,.$$

☺

Cvičení

Cvičení 1.8: Kraťte lomené výrazy a stanovte podmínky, pro které má daný výraz smysl:

a) $\dfrac{25\,x^5y^3z^{-2}}{55\,x\,y^{-1}z}$, **b)** $\dfrac{x^3-y^3}{x^2-y^2}$, **c)** $\dfrac{u\,x+v\,x-u\,y-v\,y}{u\,x-v\,x-u\,y+v\,y}$,

d) $\dfrac{a^3-8}{a^2-4}$, **e)** $\dfrac{6(x+x\,y)}{3(y+1)}$, **f)** $\dfrac{a\,b-a\,c+a^2d}{a\,c-a\,b-a^2d}$.

Cvičení 1.9: Zjednodušte lomené výrazy a stanovte podmínky, pro které má daný výraz smysl:

a) $\dfrac{\dfrac{x+y}{x\,y}}{\dfrac{x-y}{x\,y}}$, **b)** $\dfrac{\dfrac{x(1-x)}{\sqrt{x}}}{\dfrac{x^2}{\sqrt{x}}}$, **c)** $\dfrac{a}{\sqrt{a}}$,

d) $\dfrac{1-x}{1-\sqrt{x}}$, **e)** $\dfrac{(u-v)^2}{\sqrt{u}+\sqrt{v}}$, **f)** $\dfrac{\dfrac{1-x}{1-\sqrt{x}}}{\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}}$.

Cvičení 1.10: Sečtěte lomené výrazy a stanovte podmínky, pro které má daný výraz smysl:

a) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{x+1}$, **b)** $\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{b}{a+b}$, **c)** $\dfrac{1-3\,v}{u-v}+\dfrac{3\,u\,v-v}{u(u-v)}$,

d) $\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{2}{a\,b}$, **e)** $\dfrac{x}{x+2\,y}+\dfrac{2\,y}{x-2\,y}$, **f)** $p+1+\dfrac{1}{2\,p-1}$.

Cvičení 1.11: Zjednodušte složené lomené výrazy a stanovte podmínky, pro které má daný výraz smysl:

a) $\dfrac{\dfrac{x-y}{x+y}}{\dfrac{(x-y)^2}{x^2-y^2}}$, **b)** $\dfrac{1-\dfrac{1}{1+a}}{1-\dfrac{a}{1+a}}$, **c)** $\dfrac{u+1}{u-\dfrac{1}{u}}$,

d) $\dfrac{1-\dfrac{1}{t^2}}{\dfrac{t-1}{t}}$, **e)** $\dfrac{\dfrac{1}{x+y}-\dfrac{1}{x-y}}{\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{x-y}}$, **f)** $\dfrac{x+y-\dfrac{4\,x\,y}{x+y}}{\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{x-y}}$.

1.5 Úpravy výrazů

Cvičení v tomto odstavci shrnují úpravy probrané v této kapitole.

Cvičení

Cvičení 1.12: Zjednodušte výrazy:

a) $\dfrac{\left(15^{\frac{1}{3}}\cdot 4^{-\frac{1}{2}}\right)^3}{\left(25^{\frac{1}{4}}\cdot 6^{\frac{1}{8}}\right)^2} : \dfrac{2^{\frac{1}{4}}}{2^3\cdot 3^{\frac{1}{4}}}$, **b)** $\sqrt{\dfrac{2\cdot\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{6}}} : \dfrac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt{\sqrt[3]{2}\cdot 3}}$, **c)** $\dfrac{\dfrac{1}{2^3}-\dfrac{4}{2^4}}{\dfrac{5}{3^2}-\dfrac{4}{2^3}}$,

d) $\sqrt[3]{\dfrac{2}{\sqrt{8^3}}}\cdot\sqrt{\dfrac{4}{\sqrt[3]{2}}}$, **e)** $\dfrac{\sqrt[6]{12}}{\sqrt[3]{9}}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt{2}}$, **f)** $\dfrac{\left(10^{\frac{1}{4}}\cdot 5^{\frac{1}{3}}\right)^2}{25^{-\frac{1}{6}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}}$.

Cvičení 1.13: Zjednodušte výrazy a stanovte podmínky, pro které má daný výraz smysl:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4\,x+4}}$, **b)** $\dfrac{\sqrt{x^2-2\,x\,y+y^2}}{\sqrt{x^2+2\,x\,y+y^2}}$, **c)** $\dfrac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}-\dfrac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$

d) $\dfrac{1-\dfrac{a^{-1}}{b^{-1}}}{\dfrac{1}{a^{-1}}-\dfrac{1}{b^{-1}}}$, **e)** $\dfrac{\sqrt{u}-1}{\sqrt{u}+1}+\dfrac{\sqrt{u}+1}{\sqrt{u}-1}$, **f)** $\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right):\dfrac{1}{x}$,

g) $\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)(1+\sqrt{a})}{1+2\sqrt{a}+a}$, **h)** $\sqrt{x^3-2\,x^2+x}$, **i)** $\dfrac{-x^6y^3+4\,x^5y^4-4\,x^4y^5}{x^3y^2-4\,x^2y^3+4\,xy^4}$,

j) $\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{u}}-1}{\dfrac{1}{\sqrt{u}}+1}+\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{u}}+1}{\dfrac{1}{\sqrt{u}}-1}$, **k)** $\sqrt{\dfrac{a-1}{a}}\sqrt{\dfrac{a+1}{a-1}+1}$, **l)** $\dfrac{x^4y^2-xy^5}{x^3y+x^2y^2+xy^3}$,

m) $\dfrac{\dfrac{a+3}{a-3}-1}{\dfrac{a+3}{a-3}+1}$, **n)** $\dfrac{\frac{1}{u}+\frac{1}{v}}{\frac{1}{u}-\frac{1}{v}}-\dfrac{\frac{v}{u}}{\frac{v}{u}-1}$, **o)** $\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt{y}}}{\dfrac{1}{\sqrt{y}}}+\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}}{\dfrac{1}{\sqrt{x}}}$,

p) $\dfrac{\dfrac{y^2}{x^2}-\dfrac{x^2}{y^2}}{(x-y)\,(x^2+y^2)}$, **q)** $\dfrac{\dfrac{a^4}{x^4}-\dfrac{x^4}{a^4}}{\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{a}{x}\right)\left(\dfrac{a^2}{x^2}+\dfrac{x^2}{a^2}\right)}$, **r)** $\dfrac{\left(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{2}}\right)}{x}$,

t) $\dfrac{x^3+2\,x^2-15\,x}{x^4+6\,x^3+5\,x^2}$, **u)** $\dfrac{\dfrac{x}{x-3}-\dfrac{x}{x+3}}{\dfrac{(x^2-4)}{(x-3)(x^2+5\,x+6)}}$, **v)** $\dfrac{x-1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}$,

w) $\dfrac{1+\dfrac{u^2-v^2}{u^2+v^2}}{1-\dfrac{u^2-v^2}{u^2+v^2}}\cdot\dfrac{1-\dfrac{v^2}{u^2}}{u^2-v^2}\,,$ **x)** $\dfrac{\dfrac{y^4}{x^4}-\dfrac{x^4}{y^4}}{\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}}\cdot\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}\,,$ **y)** $\dfrac{\sqrt{x^3\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{x}}}}{\sqrt[3]{x\cdot\sqrt{x^3}}}\,.$

Cvičení 1.14: Vydělte polynomy a stanovte podmínky, za kterých má dělení smysl:

a) $\dfrac{x^4-6\,x^3+6\,x^2-2\,x+1}{x-1}\,,$ **b)** $\dfrac{x^4+2\,x^3+2\,x^2-x-1}{x+1}\,,$

c) $\dfrac{x^5+2\,x^4-3\,x^3-11\,x^2-4\,x+12}{x^2-4}\,,$ **d)** $\dfrac{2x^5-2x^4+x^3-4x^2+4x+1}{x^2-x}\,,$

e) $\dfrac{x^5-2\,x^3+2\,x^2-3\,x+2}{x^2+x-2}\,,$ **f)** $\dfrac{x^4-2x^3-3x^2+7x-1}{x^3-2x^2-3x+6}\,.$

Kapitola 2

Řešení rovnic

Během studia na střední škole jste jistě často (nejen v hodinách matematiky, ale i fyziky, chemie atd.) narazili na různé typy rovnic, např.

$$2x^2 + 4x = 2, \quad \log(x-3) + \log(x+2) = 8, \quad E = mc^2, \quad pV = nRT.$$

Každou z těchto rovnic jsme schopni zapsat ve tvaru, ve kterém na jedné straně rovnice bude 0 a na druhé straně rovnice budou všechny ostatní členy:

$$2x^2 + 4x - 2 = 0, \log(x-3) + \log(x+2) - 8 = 0, E - mc^2 = 0, pV - nRT = 0.$$

Mluvíme o **rovnicích v anulovaném tvaru**.

V této kapitole bude naším cílem zopakovat základní postupy při řešení nejčastěji se vyskytujících typů rovnic. S výjimkou poslední podkapitoly (věnované řešení soustav rovnic) se omezíme na rovnice s jednou neznámou.

Uvažujme tedy rovnici s jednou neznámou (označíme ji jako x). **Řešením (kořenem)** dané rovnice nazveme každé číslo, po jehož dosazení do zadané rovnice obdržíme platnou rovnost. **Vyřešit rovnici** znamená najít množinu všech kořenů dané rovnice (budeme ji označovat jako množinu K) – to ovšem může být velmi obtížná úloha, kterou mnohdy vůbec nejde vyřešit.

Pro řešení rovnic používáme různé metody, např.

- provádění úprav,
- grafické řešení (tento způsob volíme, pokud nám stačí zjistit počet kořenů nebo jen přibližnou hodnotu řešení),
- numerické řešení (v řadě případů je tato možnost jediná možná, s vybranými numerickými metodami se seznámíte v pozdějším studiu).

Nejčastěji postupujeme tím způsobem, že zadanou rovnici upravujeme tak dlouho, než získáme rovnici, kterou již snadno umíme řešit (např. rovnici lineární). Rozlišujeme přitom úpravy **ekvivalentní**, které převedou danou rovnici na rovnici se stejnou množinou kořenů, a **neekvivalentní**, při jejichž použití se může množina kořenů zvětšit – v tomto případě je vždy nutné provést zkoušku, kterou takto „přidaná“ řešení vyloučíme. Označíme-li si levou stranu zadané rovnice $L(x)$ a podobně pravou stranu rovnice $P(x)$, zkouška pro kořen x_0 znamená ověření rovnosti $L(x_0) = P(x_0)$.

Mezi ekvivalentní úpravy patří:

- záměna levé a pravé strany rovnice,
- přičtení, resp. odečtení téhož výrazu (definovaného pro všechny hodnoty neznámé, pro které má rovnice smysl) k oběma stranám rovnice,
- násobení, resp. dělení obou stran rovnice týmž **nenulovým** výrazem (definovaným pro všechny hodnoty neznámé, pro které má rovnice smysl).

Příklad 2.1: Nejčastější chyby se objevují při nesprávném použití posledně zmiňované ekvivalentní úpravy. Ukážeme si to na jednoduchém příkladu rovnice

$$(x-2)(x+1) = 2-x.$$

1. způsob řešení (zadanou rovnici převedeme do anulovaného tvaru a použijeme vzorec $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$):

$$\begin{aligned} (x-2)(x+1) &= 2-x \,/ -2+x \\ x^2+x-2x-2-2+x &= 0 \\ x^2-4 &= 0 \\ (x-2)(x+2) &= 0\,. \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že součin dvou reálných čísel je roven nule právě tehdy, je-li alespoň jedno z čísel nula, dostáváme dva kořeny: $x_1 = 2$ a $x_2 = -2$, $K = \{-2, 2\}$. O správnosti řešení se přesvědčíme zkouškou (zkoušku si u tohoto i u ostatních příkladů proveďte sami).

2. způsob řešení (Pozor – **chybný!**):

$$\begin{aligned} (x-2)(x+1) &= 2-x \,/ : (x-2) \\ x+1 &= -1 \,/ -1 \\ x &= -2\,. \end{aligned}$$

Kam se ztratil druhý kořen vypočtený prvním způsobem? Při dělení výrazem $(x-2)$ jsme opomenuli předpoklad dělit nenulovým výrazem a pro $x = 2$ jsme dělili nulou. Přitom levá strana zadané rovnice je pro $x = 2$ rovna nule stejně jako pravá strana, tudíž $x = 2$ je rovněž kořenem. Takových chyb je třeba se vyvarovat. ☺

Nejčastěji používanou neekvivalentní úpravou je umocnění obou stran rovnice. Ukážeme si to na jednoduché úloze.

Příklad 2.2: Řešme v reálném oboru rovnici $x = \sqrt{3x+4}$.
Levou i pravou stranu rovnice nejprve umocníme na druhou:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{3x+4}\,/^2 \\ x^2 &= 3x+4 \,/ -3x-4 \\ x^2-3x-4 &= 0\,. \end{aligned}$$

Poslední kvadratická rovnice má dva kořeny $x_1 = 4$ a $x_2 = -1$. Postup řešení kvadratických rovnic si podrobněji zopakujeme v následujícím textu. V průběhu řešení jsme však použili i neekvivalentní úpravu – umocnění na druhou, musíme proto provést zkoušku:

$$\begin{array}{lll} L(4) = 4 & P(4) = \sqrt{3\cdot 4+4} = \sqrt{16} = 4 & L(4) = P(4) \\ L(-1) = -1 & P(-1) = \sqrt{3\cdot(-1)+4} = \sqrt{1} = 1 & L(-1) \neq P(-1) \end{array}$$

Zkouškou jsme druhý kořen vyloučili, tedy $K = \{4\}$. Pokud bychom se zkoušce chtěli vyhnout, máme možnost na začátku řešení úlohy pečlivě vyšetřit podmínky, za jakých je umocnění ekvivalentní úpravou a rovnice má smysl: $x \geq 0$ a zároveň $3x + 4 \geq 0$. Kořen x_2 těmto podmínkám nevyhovuje, a proto je nutné jej z množiny kořenů vynechat. ☺

Při grafickém řešení rovnic můžeme postupovat dvěma různými cestami:

- Ponecháme-li rovnici v anulovaném tvaru $f(x) = 0$, hledáme průsečíky grafu (grafy elementárních funkcí si zopakujete v páté kapitole) funkce f s osou x (ty odpovídají hledaným kořenům rovnice). Tento způsob ovšem předpokládá, že umíme načrtnout graf funkce f (viz Příklad 2.3a).
- Druhou možností je převedení rovnice z anulovaného tvaru do tvaru $g(x) = h(x)$, kde grafy funkcí g, h umíme načrtnout. Hledané kořeny zadané rovnice v tomto případě odpovídají x-ovým souřadnicím průsečíků grafů funkcí g a h (viz Příklad 2.3b).

Příklad 2.3: Pomocí vhodného obrázku rozhodneme, kolik kořenů má rovnice
a) $x^2 - 2x = 3$, **b)** $x^3 - \sqrt[5]{x} = 0$.
a) Rovnici převedeme do anulovaného tvaru $x^2 - 2x - 3 = 0$. Při označení

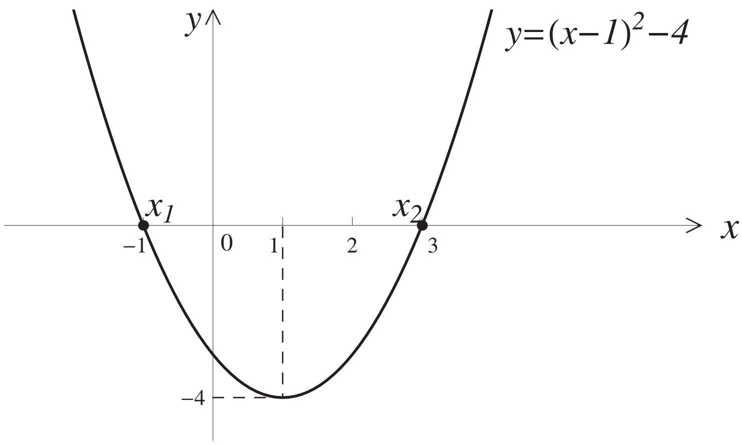
$$f(x) = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$$

hledejme průsečíky grafu funkce f s osou x. Grafem funkce f je parabola s vrcholem v bodě $(1, -4)$ a osou rovnoběžnou s osou y (více o kuželosečkách najdete ve čtvrté kapitole). Z Obrázku 2.1 je zřejmé, že daná rovnice má právě dva různé reálné kořeny (výpočtem lze snadno ověřit, že jde o kořeny $x_1 = -1$ a $x_2 = 3$).

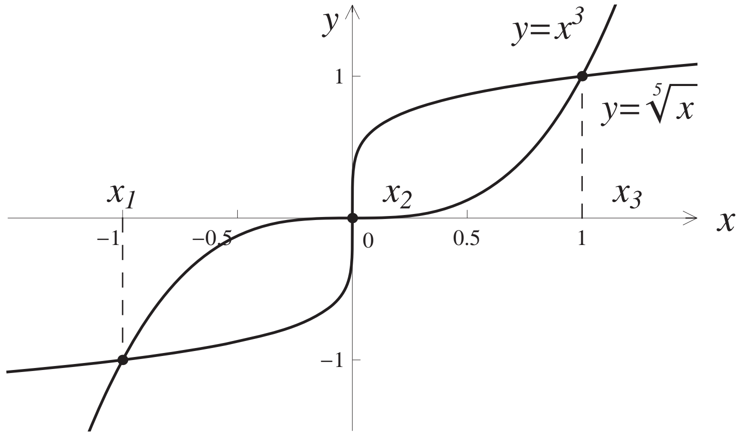
b) Graf funkce $f(x) = x^3 - \sqrt[5]{x}$ neumíme načrtnout, a proto zvolíme druhý výše uvedený postup. Zakreslíme do téhož souřadnicového systému (viz Obr. 2.2) grafy funkcí $g(x) = x^3$ a $h(x) = \sqrt[5]{x}$. Odtud je patrné, že rovnost $g(x) = h(x)$ (a tedy rovnice $x^3 - \sqrt[5]{x} = 0$) je splněna pro tři různé hodnoty x – rovnice má tři reálné kořeny $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ a $x_3 = 1$. Poznamenejme, že tuto rovnici lze řešit i algebraicky:

$$\begin{aligned} x^3 = \sqrt[5]{x} \;&\Leftrightarrow\; x^{15} = x \Leftrightarrow x^{15} - x = 0 \Leftrightarrow x(x^{14}-1) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow\; x(x^7-1)(x^7+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1 \vee x = -1. \end{aligned}$$

☺



Obrázek 2.1: Grafické řešení rovnice $x^2 - 2x = 3$.



Obrázek 2.2: Grafické řešení rovnice $x^3 - \sqrt[5]{x} = 0$.

2.1 Algebraické rovnice o jedné neznámé

Algebraickou rovnicí n-tého stupně s neznámou x rozumíme rovnici

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

kde koeficienty a_n, a_{n-1}, …, a_1, a_0 jsou reálná čísla, $a_n \neq 0$.

Algebraické rovnice prvního stupně bývá zvykem označovat jako lineární, druhého stupně jako kvadratické, třetího stupně jako kubické atd.

Příklad 2.4: Rovnice

$$x^3 + 2x^2 + 3x + 7 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3} = 0$$

sice nevyhovuje výše uvedenému vymezení, ale za předpokladu $x \neq 0$ ji vynásobením výrazem x^3 lze převést na algebraickou rovnici šestého stupně. ☺

Doporučujeme Vám, abyste u všech následujících příkladů a cvičení vždy provedli zkoušku!

2.1.1 Lineární rovnice

Lineární rovnicí s neznámou x rozumíme rovnici, kterou lze ekvivalentními úpravami převést na tvar

$$ax + b = 0\,, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Její řešení je následující:

- je-li $a \neq 0$, potom $K = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$,
- je-li $a = 0$ a $b = 0$, potom $K = \mathbb{R}$,
- je-li $a = 0$ a $b \neq 0$, potom $K = \emptyset$.

Příklad 2.5: Řešme v reálném oboru rovnici $\dfrac{x-4}{5} - x + 2 - \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{3x-4}{3}$.
Rovnici řešíme pomocí ekvivalentních úprav:

$$\begin{aligned}
\frac{x-4}{5} - x + 2 - \frac{x-2}{2} &= \frac{3x-4}{3} \qquad / \cdot 30 \\
6(x-4) - 30x + 60 - 15(x-2) &= 10(3x-4) \\
6x - 24 - 30x + 60 - 15x + 30 &= 30x - 40 \\
-69x &= -106 \ / : (-69) \\
x &= \frac{106}{69}.
\end{aligned}$$

Daná rovnice má jediné reálné řešení: $K = \left\{\frac{106}{69}\right\}$. ☺

Příklad 2.6: Řešme v reálném oboru rovnici

$$\frac{4x}{2x^2 - 18} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+3}.$$

Daná rovnice má smysl, jsou-li splněny podmínky $2x^2 - 18 \neq 0$, $x - 3 \neq 0$, $x + 3 \neq 0$, tedy pro všechna $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 3\}$. Postupnými úpravami dostáváme:

$$\begin{aligned}
\frac{4x}{2x^2 - 18} &= \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+3} \ / \cdot 2(x-3)(x+3) = 2x^2 - 18 \\
4x &= 2(x+3) + 2(x-3) \\
4x &= 2x + 6 + 2x - 6 \ / - 4x \\
0 &= 0.
\end{aligned}$$

Poslední rovnost je vždy pravdivá. Řešením dané rovnice jsou tedy všechny hodnoty x, pro něž má rovnice smysl, tj. $K = \mathbb{R} \setminus \{\pm 3\}$. ☺

Příklad 2.7: Řešme v $\mathbb{R}$ rovnici
$$\frac{x+3}{x} - \frac{x}{2(x-1)} - \frac{x+1}{2x} = \frac{1}{2x(1-x)}.$$
Rovnice má smysl, jestliže $x \neq 0$ a $x - 1 \neq 0$, tj. $x \neq 1$. Pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ tedy dostaneme
$$\begin{aligned}
\frac{x+3}{x} - \frac{x}{2(x-1)} - \frac{x+1}{2x} &= \frac{1}{2x(1-x)} \,/\cdot 2x(x-1)\\
2(x+3)(x-1) - x\cdot x - (x+1)(x-1) &= -1\\
2x^2 + 4x - 6 - x^2 - x^2 + 1 &= -1\\
4x - 5 &= -1 \,/ + 5\\
4x &= 4 \,/ : 4\\
x &= 1.
\end{aligned}$$
Získaná hodnota $x = 1$ ale není pro danou rovnici přípustná – daná rovnice proto nemá žádné reálné řešení, tedy $K = \emptyset$. ☺

Příklad 2.8: Provedeme diskusi řešitelnosti rovnice (s neznámou $x \in \mathbb{R}$)
$$\text{a)}\;\; t\,x - 2t = \frac{x-2}{12}, \qquad\qquad \text{b)}\;\; \frac{t+2}{x-2} + \frac{1}{x} = 0$$
vzhledem k reálnému parametru t.

a) Tato rovnice má smysl v celém $\mathbb{R}$. Nejprve provádíme úpravy podobně jako u rovnice bez parametru:
$$\begin{aligned}
t\,x - 2t &= \frac{x-2}{12} \,/\cdot 12\\
12t\,x - 24t &= x - 2 \,/ + 24t - x\\
x(12t - 1) &= -2 + 24t.
\end{aligned}$$
Nyní musíme rozlišit dvě možnosti. Jestliže $12t - 1 = 0$, tj. $t = \frac{1}{12}$, bude mít rovnice podobu $x \cdot 0 = 0$, a jejím řešením budou všechna reálná čísla. V případě $t \neq \frac{1}{12}$ dostaneme po dělení obou stran rovnice výrazem $12t - 1$ pro neznámou
$$x = \frac{-2 + 24t}{12t - 1} = 2.$$
U rovnic s parametrem můžeme výsledek zapsat pomocí přehledné tabulky:

t	$K(t)$
$t = \frac{1}{12}$	$\mathbb{R}$
$t \neq \frac{1}{12}$	$\{2\}$

b) Tato rovnice má smysl pro $x \neq 2$ a $x \neq 0$. Postupnými úpravami dostaneme:
$$\begin{aligned}
\frac{t+2}{x-2} + \frac{1}{x} &= 0 \,/\cdot x(x-2)\\
x(t+2) + (x-2) &= 0\\
x(t+3) &= 2.
\end{aligned}$$

Dále rozlišíme dva případy: pro $t = -3$ získáme rovnici $x \cdot 0 = 2$, které nevyhovuje žádné reálné číslo. Pro $t \neq -3$ lze rovnici dělit výrazem $(t+3)$; odtud pak plyne $x = \frac{2}{t+3}$. Nyní se vrátíme k podmínkám $x \neq 2$ a $x \neq 0$. Situace $x = 0$, tj. $\frac{2}{t+3} = 0$, nenastává. Avšak pro $\frac{2}{t+3} = 2$, tj. pro $t = -2$, dostáváme $x = 2$. Tedy pro tuto hodnotu parametru t nebude mít rovnice žádné řešení. Závěrem vše shrneme formou tabulky:

t	$K(t)$
$t = -3$	$\emptyset$
$t = -2$	$\emptyset$
$t \neq -3$ a $t \neq -2$	$\left\{\frac{2}{t+3}\right\}$

☺

2.1.2 Kvadratická rovnice

Kvadratickou rovnicí nazýváme rovnici, kterou je možné po vhodných úpravách zapsat ve tvaru

$$ax^2 + bx + c = 0\,, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}\,, \qquad a \neq 0\,.$$

Jsou-li x_1, x_2 kořeny dané kvadratické rovnice, pak ji lze rovněž psát ve tvaru

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0.$$

Příklad 2.9: Řešme v $\mathbb{R}$ rovnici $x^2 + 6x - 91 = 0$.

Ukážeme si postup, který v dalším použijeme k odvození vzorce pro kořeny kvadratické rovnice. Použijeme-li doplnění na čtverec (na úplnou druhou mocninu, viz vzorec (1.1)) $x^2 + 6x = (x+3)^2 - 9$, plyne odtud

$$(x+3)^2 - 9 - 91 = (x+3)^2 - 100 = 0.$$

Nyní použijeme vzorce $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$, kde dosadíme za $A = x + 3$, $B = 10$:

$$\begin{gathered}[(x+3) - 10][(x+3) + 10] = 0\\ (x-7)(x+13) = 0\\ x_1 = 7\,,\ x_2 = -13.\end{gathered}$$

Pro množinu kořenů dané kvadratické rovnice platí $K = \{7, -13\}$. ☺

V obecném případě dostaneme po doplnění na čtverec:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = 0 \end{aligned}$$

Výraz $b^2 - 4ac$ bývá zvykem označovat jako diskriminant D. S jeho pomocí lze pro $D \geq 0$ psát za použití vzorce $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$:

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}\right] = a\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{D}}{2a}\right) = 0$$

$\Rightarrow x_1 = -\dfrac{b}{2a}+\dfrac{\sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = -\dfrac{b}{2a}-\dfrac{\sqrt{D}}{2a},$ což zkráceně zapisujeme jako $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Dostáváme závěr:

Pro kořeny x_1, x_2 kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ platí

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}. \tag{2.1}$$

Zdůrazněme, že tento vzorec **je nutné si pamatovat**. Je zřejmé, že právě diskriminant a jeho znaménko rozhoduje o tom, kolik a jaké bude mít rovnice řešení. V oboru reálných čísel má rovnice řešení pouze pro $D \geq 0$. Kvadratická rovnice ovšem může mít řešení i v případě $D < 0$, toto řešení je ale z oboru komplexních čísel. Doporučujeme všem čtenářům, kteří se dosud s komplexními čísly nesetkali, aby nejprve podrobně prostudovali šestou kapitolu, a až poté pokračovali studiem následujících příkladů.

Celkem dostáváme tyto možnosti:

- pro $D > 0$ má kvadratická rovnice dvě různá reálná řešení

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

- pro $D = 0$ má kvadratická rovnice jedno reálné řešení (mluvíme o dvojnásobném kořenu)

$$x_{1,2} = \frac{-b}{2a}$$

- pro $D < 0$ má kvadratická rovnice dvě různá komplexní řešení (jde o dvojici čísel komplexně sdružených)

$$x_1 = \frac{-b + \mathrm{i}\sqrt{-D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \mathrm{i}\sqrt{-D}}{2a}.$$

Příklad 2.10: Řešme kvadratické rovnice:

a) $x^2 - 13x + 36 = 0$, **b)** $x^2 - 16x + 64 = 0$, **c)** $x^2 - 4x + 8 = 0$.

a) V této rovnici je $a = 1$, $b = -13$, $c = 36$, pro její diskriminant platí $D = b^2 - 4ac = (-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36 = 169 - 144 = 25 > 0$. Rovnice má proto dva reálné kořeny

$$x_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2} = \begin{matrix} \nearrow & x_1 = 9 \\ \searrow & x_2 = 4 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad K = \{4, 9\}.$$

b) Pro $a = 1$, $b = -16$, $c = 64$ platí $b^2 - 4ac = (-16)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 64 = 0$, takže rovnice má jediný (dvojnásobný) reálný kořen:

$$x_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{0}}{2} = 8 \quad \Rightarrow \quad K = \{8\}.$$

c) $D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = -16 < 0$, rovnice má 2 komplexně sdružené kořeny:

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{-16}}{2} = \begin{array}{l} \nearrow \quad x_1 = 2 + 2\mathrm{i} \\ \searrow \quad x_2 = 2 - 2\mathrm{i} \end{array} \quad \Rightarrow \quad K = \{2 + 2\mathrm{i}\,, 2 - 2\mathrm{i}\,\}.$$

V případě, kdybychom v zadání požadovali řešení pouze v reálném oboru, poslední rovnice by neměla žádné řešení. ☺

Příklad 2.11: Řešme v reálném oboru rovnici

$$x - 8 + \frac{x}{x-8} = 10.$$

Rovnici má smysl řešit pro $x \neq 8$. Pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{8\}$ dostáváme pomocí ekvivalentních úprav:

$$\begin{aligned} x - 8 + \frac{x}{x-8} &= 10 \;/ \cdot (x-8) \\ (x-8)^2 + x &= 10(x-8) \\ x^2 - 16x + 64 + x &= 10x - 80 \;/ - 10x + 80 \\ x^2 - 25x + 144 &= 0. \end{aligned}$$

Pro diskriminant této kvadratické rovnice platí $D = 25^2 - 4 \cdot 1 \cdot 144 = 49$. Odtud již snadno pro kořeny dostáváme možnosti

$$x_{1,2} = \frac{25 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{25 \pm 7}{2}.$$

Rovnici vyhovují reálná čísla $x_1 = 9$ a $x_2 = 16$. Vzhledem k tomu, že oba kořeny patří do množiny $\mathbb{R} \setminus \{8\}$ a po celou dobu jsme prováděli pouze ekvivalentní úpravy, nemusíme provádět zkoušku. Množinou kořenů je $K = \{9, 16\}$. ☺

Příklad 2.12: Řešme kvadratické rovnice:

a) $2x^2 - 6 = 0$, **b)** $3x^2 + 7 = 0$, **c)** $6x^2 - 2x = 0$.

Zde se setkáváme se zvláštními případy kvadratických rovnic, k jejichž řešení není nutné počítat diskriminant. Rovnice v případech a) a b) jsou tzv. *kvadratické rovnice bez lineárního členu* neboli *ryze kvadratické rovnice*. Jejich řešení snadno najdeme osamostatněním členu x^2 na jedné straně rovnice a následným odmocněním celé rovnice:

a) $x^2 = 3$, což platí pro $x = \pm\sqrt{3}$, tj. $K = \{\pm\sqrt{3}\}$;

b) $x^2 = -\frac{7}{3}$, tedy $x = \pm\mathrm{i}\sqrt{\frac{7}{3}}$; $K = \{\pm\mathrm{i}\sqrt{\frac{7}{3}}\}$.

V případě c) jde o *kvadratickou rovnici bez absolutního členu*. Její řešení najdeme snadno pomocí vytýkání:

$$6x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow 2x(3x-1) = 0, \text{ což platí pro } x = 0 \text{ nebo } x = \tfrac{1}{3};\ K = \{0, \tfrac{1}{3}\}.$$ ☺

Jestliže kořeny x_1, x_2 kvadratické rovnice vyjádříme pomocí výše uvedeného vzorce (2.1), snadno zjistíme, že

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = -\frac{b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 &= \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{b^2-D}{4a^2} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}. \end{aligned}$$

Jsou-li x_1, x_2 kořeny kvadratické rovnice $ax^2+bx+c=0$, potom pro ně platí

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}. \tag{2.2}$$

Příklad 2.13: Provedeme diskusi řešitelnosti kvadratické rovnice

$$(1+t)x^2 - t\,x - 1 = 0$$

v závislosti na reálném parametru t.

- Pro $t = -1$ se daná kvadratická rovnice redukuje na lineární rovnici $x - 1 = 0$ a má jediné reálné řešení $x = 1$.
- Je-li $t \neq -1$, řešíme kvadratickou rovnici, pro jejíž diskriminant platí

  $$D = (-t)^2 - 4\cdot(t+1)\cdot(-1) = t^2 + 4t + 4 = (t+2)^2 \geq 0.$$

  - Podmínka $D = 0$ je splněna pro $t = -2$. V tomto případě má rovnice jediný (dvojnásobný) reálný kořen $x_{1,2} = 1$.
  - Pro $t \neq -1$ a $t \neq -2$ má rovnice v reálném oboru dvě řešení

    $$x_{1,2} = \frac{t \pm |t+2|}{2(t+1)}.$$

  Vzhledem k tomu, že v závislosti na reálném parametru t platí buď $|t+2| = t+2$ (v případě $t > -2$), nebo $|t+2| = -(t+2)$ (v případě $t < -2$), můžeme celkem psát $|t+2| = \pm(t+2)$ a po úpravě dostáváme

  $$x_{1,2} = \frac{t \pm (t+2)}{2(t+1)} = \begin{array}{l} \nearrow \quad x_1 = \dfrac{t+(t+2)}{2(t+1)} = 1, \\ \searrow \quad x_2 = \dfrac{t-(t+2)}{2(t+1)} = \dfrac{-1}{t+1}. \end{array}$$

Celkový závěr diskuse můžeme zapsat formou tabulky:

t	$K(t)$
$t = -1$	$\{1\}$
$t = -2$	$\{1\}$
$t \neq -1$ a $t \neq -2$	$\left\{1, \frac{-1}{t+1}\right\}$

☺

2.1.3 Rovnice třetího a vyššího stupně

Je-li stupeň algebraické rovnice tři nebo čtyři, existují pro hledání řešení podobné vzorce sestavené z koeficientů rovnice, jako jsme poznali u rovnice kvadratické, tzv. Cardanovy vzorce.

Na začátku 19. století norský matematik Niels Henrik Abel (1802–1829) dokázal, že pro algebraické rovnice pátého a vyššího stupně kořeny rovnice pomocí podobného vzorce vyjádřit nelze. V těchto případech nám nezbývá než použít numerický způsob řešení nebo zvolit vhodnou substituci či jeden kořen „uhodnout“ a po vydělení kořenovým činitelem snížit stupeň rovnice. Takto budeme postupovat tak dlouho, dokud nedojdeme k rovnici druhého stupně, kterou již umíme řešit. Naposledy zmíněný postup je však výhodný pouze v případech, kdy kořeny rovnice jsou „hezká čísla“ (0, ±1, ±2 atd.).

Se speciálním typem algebraických rovnic vyššího stupně se ještě setkáte v šesté kapitole, věnované komplexním číslům. Nyní si ukážeme postup řešení několika dalších konkrétních rovnic vyšších stupňů.

Příklad 2.14: Řešme v $\mathbb{R}$ rovnici $3x^4 - 4x^2 + 1 = 0$.

Tato rovnice je sice algebraickou rovnicí čtvrtého stupně, ale neznámou x obsahuje pouze v sudých mocninách, a proto ji lze substitucí $y = x^2$ snadno převést na rovnici kvadratickou:

$$
\begin{aligned}
3x^4 - 4x^2 + 1 &= 0 \qquad /\text{subst. } y = x^2 \\
3y^2 - 4y + 1 &= 0 \qquad D = 4^2 - 12 = 4 \\
y_{1,2} &= \frac{4 \pm 2}{6} = \begin{array}{l} \nearrow \quad y_1 = 1 \\ \searrow \quad y_2 = \frac{1}{3}. \end{array}
\end{aligned}
$$

Nyní se vrátíme zpět k substituci $y = x^2$. Z možnosti $y_1 = 1$ dostáváme $x^2 = 1$, tj. dva kořeny $x_{1,2} = \pm 1$ a z možnosti $y_2 = \frac{1}{3}$ dostáváme $x^2 = \frac{1}{3}$, tedy další dva kořeny $x_{3,4} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$. Celkem získáváme čtyřprvkovou množinu kořenů $K = \left\{\pm 1, \pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$.

☺

Příklad 2.15: Řešme v $\mathbb{R}$ rovnici $2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0$.

Mnohočlen na levé straně rovnice pomocí postupného vytýkání zapíšeme v součinovém tvaru:

$$\begin{aligned}(2x^3-2)+(3x^2-3x) &= 0\\ 2(x^3-1)+3x(x-1) &= 0\\ 2(x-1)(x^2+x+1)+3x(x-1) &= 0\\ (x-1)[2(x^2+x+1)+3x] &= 0\\ (x-1)(2x^2+5x+2) &= 0.\end{aligned}$$

Odtud dostáváme dvě možnosti: $x-1=0$ nebo $2x^2+5x+2=0$,

$$\text{tedy } x_1=1;\ x_{2,3}=\frac{-5\pm\sqrt{25-16}}{4}= \begin{array}{l}\nearrow\ x_2=-2\\ \searrow\ x_3=-\frac{1}{2}.\end{array}$$

Daná rovnice má tři reálné kořeny: $K=\left\{1,-2,-\frac{1}{2}\right\}$. ☺

Příklad 2.16: Řešme v oboru komplexních čísel rovnici $x^3-3x-18=0$.

V tomto případě se převod na součinový tvar pomocí vytýkání na první pohled nenabízí. Zkusme do rovnice postupně dosazovat čísla ±1, ±2, ±3 atd. Snadno ověříme, že po dosazení $x_1=3$ do rovnice je splněna rovnost. To znamená, že mnohočlen $x^3-3x-18$ má kořenový činitel $x-3$. Provedeme dělení:

$$\begin{array}{l}(x^3-3x-18):(x-3)=x^2+3x+6\\ \underline{-(x^3-3x^2)}\\ \qquad 3x^2-3x-18\\ \qquad \underline{-(3x^2-9x)}\\ \qquad\qquad 6x-18\\ \qquad\qquad \underline{-(6x-18)}\\ \qquad\qquad\qquad 0\end{array}$$

Nyní již můžeme zadanou rovnici přepsat v součinovém tvaru:

$$(x-3)(x^2+3x+6)=0.$$

Tedy buď $x-3=0$ nebo $x^2+3x+6=0$. Kvadratická rovnice $x^2+3x+6=0$ má dva komplexně sdružené kořeny

$$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9-24}}{2}=-\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{15}}{2}\mathrm{i}\,.$$

Pro množinu kořenů platí $K=\left\{3,-\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{15}}{2}\mathrm{i}\right\}$. ☺

Zdůrazněme, že v příkladu 2.16 se nám podařilo rovnici vyřešit, protože jsme jeden její kořen „uhodli“, v příkladu 2.15 se ji podařilo rozložit na součinový tvar. Obecnou rovnici třetího stupně takto ovšem vyřešit nelze.

2.1.4 Rovnice s neznámou pod odmocninou

Strategie řešení rovnic s neznámou pod odmocninou (iracionálních rovnic) je založena na odstranění odmocnin z rovnice pomocí umocnění obou stran rovnice. My se v dalším textu omezíme jen na druhé odmocniny.

- Jestliže rovnice obsahuje jedinou odmocninu s neznámou, pak ji osamostatníme na jednu stranu rovnice a poté rovnici umocníme (viz příklad 2.17).
- Jestliže rovnice obsahuje dvě a více odmocnin s neznámou, pak jednu, případně dvě odmocniny, ponecháme na jedné straně rovnice, všechny ostatní členy převedeme na druhou stranu rovnice a rovnici tak dlouho umocňujeme, až všechny odmocniny odstraníme (viz příklad 2.18).

Při řešení iracionálních rovnic bychom nikdy neměli zapomenout provést zkoušku, protože ne vždy používáme jen ekvivalentní úpravy!

Příklad 2.17: Řešme v reálném oboru rovnici $8 + 4\sqrt{x-9} = x - 1$.

$$\begin{aligned}
4\sqrt{x-9} &= x-9 \ /^2 \\
16(x-9) &= (x-9)^2 \ / -16(x-9) \\
0 &= (x-9)(x-9-16) \\
0 &= (x-9)(x-25) \Rightarrow x_1 = 9, x_2 = 25
\end{aligned}$$

Zk.: $L(9) = 8 + 4\sqrt{9-9} = 8$ $\quad P(9) = 9 - 1 = 8$ $\quad L(9) = P(9)$
$L(25) = 8 + 4\sqrt{25-9} = 24$ $\quad P(25) = 25 - 1 = 24$ $\quad L(25) = P(25)$

$$K = \{9, 25\}.$$

☺

Příklad 2.18: Řešme v reálném oboru rovnici $\sqrt{x+3} + 2\sqrt{1-x} = 2\sqrt{x}$.

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+3} + 2\sqrt{1-x} &= 2\sqrt{x} \ /^2 \\
x + 3 + 4\sqrt{(x+3)(1-x)} + 4 - 4x &= 4x \\
-3x + 7 + 4\sqrt{(x+3)(1-x)} &= 4x \ / +3x - 7 \\
4\sqrt{(x+3)(1-x)} &= 7x - 7 \ /^2 \\
16(x+3)(1-x) &= 49(x-1)^2 \\
16(x+3)(1-x) &= 49(1-x)^2 \\
(1-x)[16(x+3) - 49(1-x)] &= 0 \\
(1-x)(65x-1) &= 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{65}
\end{aligned}$$

Zk.: $L(1) = \sqrt{1+3} + 2\sqrt{1-1} = 2$ $\quad P(1) = 2\sqrt{1} = 2$ $\quad L(1) = P(1)$
$L(\frac{1}{65}) = \sqrt{\frac{1}{65} + 3} + 2\sqrt{\frac{64}{65}} = \frac{30}{\sqrt{65}}$ $\quad P(\frac{1}{65}) = 2\sqrt{\frac{1}{65}}$ $\quad L(\frac{1}{65}) \neq P(\frac{1}{65})$

$$K = \{1\}.$$

☺

Cvičení

Cvičení 2.1: Řešte v reálném oboru rovnice:

a) $3(2-x) - 7(1-2x) + 3x - 4 = 9,$ **b)** $(x-2)^2 - 2x = (4-x)^2,$

c) $6(x-2) + 4(2-x) = 2x - 4,$ **d)** $\dfrac{2x-8}{\frac{2}{x-4}+3} = 0,$

e) $\dfrac{\frac{x-2}{5}+\frac{x+3}{6}}{\frac{2-x}{3}+\frac{x+4}{7}} = 0,$ **f)** $\dfrac{x-4}{x+2} - \dfrac{x+8}{x-3} = 0,$

g) $\dfrac{x+8}{7} + x - 3 = \dfrac{4x-1}{3} + \dfrac{x}{2} - \dfrac{5}{6},$ **h)** $\dfrac{x+4}{4} - \dfrac{\frac{x+1}{2}}{\frac{2x+2}{4}} = 0,$

i) $(x+1)(2x-3) + (1-x)(3+x) = (x+4)(x-8),$

j) $4(2-x)^2 - 3(x+3)^2 = (x-16)^2,$

k) $(3x-1)^2 - 4(x+2)^2 + 16(x-2) = x^2 + (2x-3)^2.$

Cvičení 2.2: Řešte v reálném oboru rovnice:

a) $x^2 - 3x - 28 = 0,$ **b)** $25x^2 - 1 = 0,$ **c)** $2x^2 - 7x + 6 = 0,$

d) $49x^2 - 14x + 1 = 0,$ **e)** $x^2 + 2x + 4 = 0,$ **f)** $16x^2 - 16x + 3 = 0,$

g) $6x^2 - x = 0,$ **h)** $169x^2 + 1 = 0,$ **i)** $x^2 - 196 = 0.$

Cvičení 2.3: Řešte v reálném oboru rovnice:

a) $\dfrac{3-x}{x-1} + \dfrac{x}{2x-5} = 1,$ **b)** $\dfrac{3-x}{x-1} + \dfrac{x}{3} = 1,$

c) $\dfrac{x-2}{x-3} + \dfrac{x-3}{x-2} = 0,$ **d)** $\dfrac{2x+3}{4x} - \dfrac{1-x}{x+1} + \dfrac{3-2x}{x^2+x} = 0,$

e) $3(x-4)^2 - 2(1-x)^2 + (x-2)(x+2) = -2(x-3)(7-x),$

f) $(6-x)(x+3) - 2(x-1)(x+1) = -2(x-\sqrt{11})(x+\sqrt{11}).$

Cvičení 2.4: Řešte v komplexním oboru rovnice:

a) $2x^2 - \sqrt{3}x + 5 = 0,$ **b)** $x^2 - 4x = 32,$

c) $x^2 = 2(x+4),$ **d)** $4x^2 - 2(1+\sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0,$

e) $x(x-6) = -10,$ **f)** $2x^2 - 2\sqrt{2}x - 2 = 0,$

g) $x^2 = 10x - 29,$ **h)** $\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2} = 4.$

Cvičení 2.5: Proveďte v $\mathbb{R}$ diskusi řešitelnosti rovnice vzhledem k parametru $p \in \mathbb{R}$:

a) $x(p-2) = p(x-2) + 10,$ **b)** $x(p-2) = p(x+2) + 8,$

c) $p(x+3) - x(2-p) = p + 5,$ **d)** $8p - p(2-x) + (x-2)(x+3) = x^2 - p^2,$

e) $x^2 - px + 4 = 0,$ **f)** $p^2x^2 - 6px + 1 = 0,$

g) $\dfrac{2p(x-1)}{x+1} = 5,$ h) $\dfrac{p}{x} + \dfrac{p-2}{x-1} = 2.$

Cvičení 2.6: Řešte v $\mathbb{R}$ pomocí vhodné substituce následující rovnice:

a) $x^4 - 256 = 0,$ **b)** $2x^4 - 7x^2 + 6 = 0,$ **c)** $3x^4 + 5x^2 + 1 = 0,$

d) $x^4 + 5x^2 - 6 = 0,$ **e)** $x^6 - 11x^3 + 30 = 0,$ **f)** $x^6 + 12x^3 - 28 = 0.$

Cvičení 2.7: Pomocí postupného vytýkání a převedení na součinový tvar řešte v komplexním oboru rovnice:

a) $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0,$ **b)** $3x^3 - 3x^2 - 6x = 0,$

c) $x^3 + 3x^2 - 6x - 8 = 0,$ **d)** $2x^3 - 7x^2 + 2x - 7 = 0,$

e) $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x = 0,$ **f)** $3x^3 - 3x^2 + 9x - 9 = 0.$

Cvičení 2.8: Nejprve se pokuste „odhadnout" dosazováním čísel ± 1, ± 2, ± 3, ... atd. některý z kořenů dané rovnice a poté pomocí dělení kořenovým činitelem najděte kořeny ostatní:

a) $6x^3 - 13x^2 + x + 2 = 0,$ **b)** $-3x^3 - 8x^2 + 5x + 6 = 0,$

c) $x^3 - 5x^2 + 5x - 1 = 0,$ **d)** $x^3 + 9x^2 + 26x + 24 = 0,$

e) $-x^3 + 11x^2 - 38x + 40 = 0,$ **f)** $2x^3 - 3x^2 - 18x + 27 = 0.$

Cvičení 2.9: Najděte všechna reálná řešení rovnic:

a) $\sqrt{x^2 - 15} = x - 1,$ **b)** $\sqrt{7 - x} + x = 7,$

c) $\sqrt{2x + 12} + x + 2 = 0,$ **d)** $\sqrt{12 - x} - x = 2x - 6,$

e) $x - \sqrt{x} = \sqrt{x\sqrt{x} - x},$ **f)** $\sqrt{-x^2 + x + 31} = x - 5,$

g) $\sqrt{2x + 3} + 2\sqrt{x - 8} = 0,$ **h)** $3\sqrt{x + 6} + 4\sqrt{12 + 2x} = 0,$

i) $2\sqrt{x + 4} = \sqrt{x^2 - 5},$ **j)** $\sqrt{x + 3} = \sqrt{10} - \sqrt{3 - x}.$

2.2 Jednoduché exponenciální a logaritmické rovnice

Na tomto místě doporučujeme čtenáři, aby si zopakoval vlastnosti a průběh exponenciální ($y = a^x$, kde $a > 0$, $a \neq 1$) a logaritmické ($y = \log_a x$, kde $a > 0$, $a \neq 1$) funkce (viz pátá kapitola), a připomínáme, že je nutné ovládat pravidla pro počítání s mocninami a logaritmy. Dále je třeba zdůraznit, že obecně lze exponenciální a logaritmické rovnice řešit jen numericky, a proto se v dalším omezíme pouze na jednoduché typy těchto rovnic.

Exponenciální rovnicí nazýváme rovnici, která obsahuje neznámou v argumentu (exponentu) exponenciální funkce.

Při řešení exponenciálních rovnic využíváme důležitou vlastnost exponenciální funkce: pro $a > 0$, $a \neq 1$ platí

$$a^x = a^y \quad \Rightarrow \quad x = y. \tag{2.3}$$

(Říkáme, že exponenciální funkce $y = a^x$ je prostá.)
Exponenciální rovnici pak zpravidla řešíme tak, že se ji pokusíme vhodnými úpravami převést na rovnici typu

$$a^{f(x)} = b^{g(x)}, \quad a > 0,\, b > 0. \tag{2.4}$$

- Jestliže $a = b \neq 1$, plyne z (2.3) a (2.4) rovnice $f(x) = g(x)$ (viz Příklad 2.19, 2.20).
- Jestliže $a \neq b$, potom obě strany rovnice (2.4) logaritmujeme, přičemž dostaneme

  $$f(x) \cdot \log_c a = g(x) \cdot \log_c b,\ c > 0,\, c \neq 1,$$

  kterou dále řešíme vzhledem k proměnné x (viz Příklad 2.21). Můžeme např. volit $c = 10$, tedy dekadický logaritmus (log).
- Další často používanou metodou je volba vhodné substituce, s jejíž pomocí převedeme exponenciální rovnici na rovnici algebraickou (viz Příklad 2.22).

Příklad 2.19: Řešme v reálném oboru rovnici $9^{-\frac{x}{2}} - 3 \cdot 3^{1-x} + 72 = 0.$

Rovnici nejprve upravíme tak, aby obsahovala exponenciální funkci pouze o základu 3:

$$\begin{aligned}
(3^2)^{-\frac{x}{2}} - 3^{1+1-x} + 72 &= 0\\
3^{-x} - 3^{2-x} &= -72 \ / \cdot 3^x\\
1 - 3^2 &= -72 \cdot 3^x\\
-8 &= -72 \cdot 3^x \ / : (-72)\\
\frac{1}{9} &= 3^x\\
3^{-2} &= 3^x.
\end{aligned}$$

Odtud podle (2.3) dostáváme $x = -2$. Rovnice má jediné řešení: $K = \{-2\}$. ☺

Příklad 2.20: Řešme v reálném oboru rovnici $6 \cdot 2^{x-3} - 3 \cdot 3^{6-x} = 3 \cdot 2^{x-4} - 6 \cdot 3^{5-x}$.

Mocniny se stejným základem převedeme na jednu stranu rovnice:

$$6 \cdot 2^{x-3} - 3 \cdot 2^{x-4} = 3 \cdot 3^{6-x} - 6 \cdot 3^{5-x}$$

a na základě pravidel pro práci s mocninami osamostatníme na každé straně rovnice mocninu obsahující x:

$$\begin{aligned}
6 \cdot 2^x \cdot 2^{-3} - 3 \cdot 2^x \cdot 2^{-4} &= 3 \cdot 3^6 \cdot 3^{-x} - 6 \cdot 3^5 \cdot 3^{-x}\\
2^x \left(\frac{6}{8} - \frac{3}{16}\right) &= 3^{-x}\left(3^7 - 6 \cdot 3^5\right)\\
2^x \cdot \frac{9}{16} &= 3^{-x} \cdot 3^6.
\end{aligned}$$

Dále mocniny obsahující neznámou x osamostatníme na jedné straně rovnice (rovnici násobíme výrazem 3^x a dělíme $\frac{9}{16}$):

$$\begin{aligned}
2^x \cdot 3^x &= 3^6 \cdot \frac{16}{9}\\
6^x &= 6^4\\
x &= 4 \Rightarrow K = \{4\}.
\end{aligned}$$

☺

Příklad 2.21: Řešme v reálném oboru rovnici $3^{x-2} = 2^{2x+1}$.

Použitím pravidel pro počítání s mocninami nejprve rovnici upravíme do podoby

$$\begin{aligned} 3^x \cdot 3^{-2} &= 2^{2x} \cdot 2^1 \\ \frac{3^x}{4^x} &= 2 \cdot 3^2 \\ \left(\frac{3}{4}\right)^x &= 18. \end{aligned}$$

Nyní obě strany rovnice logaritmujeme:

$$\log\left(\frac{3}{4}\right)^x = \log 18\,, \qquad \text{tedy} \qquad x = \frac{\log 18}{\log \frac{3}{4}}; \qquad K = \left\{\frac{\log 18}{\log \frac{3}{4}}\right\}.$$

Pokud bychom nejprve obě strany rovnice logaritmovali a až poté upravovali, vypadal by výpočet takto:

$$\begin{aligned} \log 3^{x-2} &= \log 2^{2x+1} \\ (x-2)\log 3 &= (2x+1)\log 2 \\ x(\log 3 - \log 2) &= \log 2 + 2\log 3 \\ x &= \frac{\log 2 + 2\log 3}{\log 3 - 2\log 2}. \end{aligned}$$

Ověřte sami, že jsme dospěli ke stejnému výsledku jako v prvním případě. ☺

Příklad 2.22: Řešme v reálném oboru rovnici $4^x - 3 \cdot 2^x - 40 = 0$.

Volíme-li substitucí $y = 2^x$, pak $4^x = (2^2)^x = 2^{2x} = (2^x)^2 = y^2$ a danou rovnici převedeme na rovnici kvadratickou $y^2 - 3y - 40 = 0$, pro kterou platí

$$y_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+160}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{169}}{2} = \begin{array}{l} \nearrow \; y_1 = 8 \\ \searrow \; y_2 = -5. \end{array}$$

Vrátíme-li se k původní substituci, dostáváme dvě rovnice $2^x = 8$ a $2^x = -5$. První z těchto rovnic má kořen $x = 3$, druhá rovnice nemá žádné reálné řešení (2^x je vždy číslo kladné). Celkem $K = \{3\}$. ☺

Logaritmickou rovnicí rozumíme rovnici, která obsahuje neznámou v argumentu logaritmické funkce.

Při řešení logaritmických rovnic využíváme následující vlastnost logaritmické funkce: pro $a > 0$, $a \neq 1$, $x, y > 0$ platí

$$\log_a x = \log_a y \quad \Rightarrow \quad x = y. \tag{2.5}$$

(Říkáme, že logaritmická funkce $y = \log_a x$ je prostá.)

Logaritmické rovnice pak řešíme zpravidla převedením do tvaru

$$\log_a f(x) = \log_a g(x), \ a > 0, a \neq 1. \tag{2.6}$$

Vzhledem k vlastnosti (2.5) plyne z (2.6) rovnice

$$f(x) = g(x).$$

Je ovšem nutné si uvědomit, že takové „odlogaritmování" nemusí být ekvivalentní úpravou. Při řešení logaritmické rovnice je proto nutné provést na závěr řešení zkoušku (viz Příklad 2.23).

Podobně jako u exponenciálních rovnic lze v některých případech vhodnou substitucí převést rovnici logaritmickou na rovnici algebraickou (viz Příklad 2.24).

Příklad 2.23: Řešme v reálném oboru rovnici $\log x + \log(x-4) = 2\log 2 + \log 3$.

S využitím pravidel pro počítání s logaritmy lze psát

$$\log(x(x-4)) = \log(2^2 \cdot 3).$$

Podle (2.5) odtud plyne

$$\begin{aligned} \log(x(x-4)) &= \log 12 \\ x(x-4) &= 12. \end{aligned}$$

Danou logaritmickou rovnici se nám podařilo převést na rovnici kvadratickou:

$$x^2 - 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+48}}{2} = \frac{4 \pm 8}{2} = \begin{array}{l} \nearrow \ x_1 = 6 \\ \searrow \ x_2 = -2. \end{array}$$

Pro oba kořeny nyní provedeme zkoušku:

$$\begin{aligned} L(6) &= \log 6 + \log 2 = \log(6 \cdot 2) = \log 12 \\ P(6) &= 2\log 2 + \log 3 = \log(2^2 \cdot 3) = \log 12, \text{ tedy } L(6) = P(6) \\ L(-2) &= \log(-2) + \ldots \text{tato hodnota není definována, druhý kořen nevyhovuje} \end{aligned}$$

Daná logaritmická rovnice má jediné řešení, $K = \{6\}$. ☺

Příklad 2.24: Řešme v reálném oboru rovnici $\ln^2 x^2 - 4\ln\sqrt{x} - 2 = 0$.

Daná rovnice má smysl za podmínek $x^2 > 0$, $\sqrt{x} > 0$ a $x \geq 0$, tedy pro $x \in (0; \infty)$. Připomínáme, že pro $x > 0$ platí

$$\ln^2 x^2 = \left(\ln x^2\right)^2 = (2\ln x)^2 = 4\ln^2 x \qquad \text{a} \qquad \ln\sqrt{x} = \frac{1}{2}\ln x.$$

Tedy rovnici upravíme na tvar:

$$\begin{aligned} 4\ln^2 x - 4 \cdot \frac{1}{2}\ln x - 2 &= 0, \text{ tj.} \\ 4\ln^2 x - 2\ln x - 2 &= 0 \\ 2\ln^2 x - \ln x - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Zavedením substituce $y = \ln x$ převedeme rovnici na kvadratickou:

$$2y^2 - y - 1 = 0, \qquad \text{tj.} \qquad y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = \begin{array}{l} \nearrow \quad y_1 = 1 \\ \searrow \quad y_2 = -\frac{1}{2}. \end{array}$$

Vrátíme-li se zpět k substituci, dostaneme dvě rovnice $\ln x = 1$ a $\ln x = -\frac{1}{2}$, které již snadno vyřešíme:

$$\begin{aligned} \ln x = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad x = \mathrm{e} \\ \ln x = -\frac{1}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}. \end{aligned}$$

Oba kořeny splňují podmínku $x > 0$, tedy $K = \left\{ \mathrm{e}, \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} \right\}$.

☺

Cvičení

Cvičení 2.10: Najděte všechna reálná řešení rovnic:

a) $3^{x-2} = \frac{1}{3}$, **b)** $\left(\frac{1}{2}\right)^{2-3x} = 4$, **c)** $\left(\frac{7}{2}\right)^{3-x} = \frac{49}{4}$,

d) $\left(\frac{64}{128}\right)^{3x} = 1$, **e)** $8^x = 15$, **f)** $2^{x-1} = 3$,

g) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2-6x} = 7$, **h)** $\log x = 3$, **i)** $\log_2(x+1) = 7$,

j) $\log_{\frac{1}{2}}(2x+1) = 2$, **k)** $\ln\sqrt{x} = 4$, **l)** $\log_3\left(\dfrac{x+2}{x-4} - 1\right) = 0$.

Cvičení 2.11: Najděte všechna reálná řešení rovnic:

a) $27 \cdot 3^{x-2} - 6 \cdot 3^{x+1} + 15 \cdot 3^x = 0$, **b)** $9^x - 7 \cdot 3^x + 12 = 0$,

c) $\log^2 x - 3\log x + 2 = 0$, **d)** $3^{x+2} - \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} + 4 \cdot 3^x = 0$,

e) $\log(35 - x^3) = 3\log(5 - x)$, **f)** $2^x + 2^{-x} = 2$,

g) $3^{2x-1} + 3^{2x-2} - 3^{2x-4} = 315$, **h)** $2^{x-2} \cdot 4^{2x+1} = 8^{2x-1}$,

i) $4\log_5\sqrt{x} + 2\log_5 x = 7 - \log_5 x^3$, **j)** $\log_2(x-2) + \log_2(8-x) = 2$,

k) $9 \cdot 3^{x+1} + 2^{x+2} = 5 \cdot 2^{x+2} - 6 \cdot 3^{x+2}$, **l)** $\ln(x+1) + \ln(x-1) = \ln 8 + \ln(x-2)$.

2.3 Jednoduché goniometrické rovnice

Než začnete řešit goniometrické rovnice, zopakujte si vlastnosti a průběhy funkcí sinus, kosinus, tangens a kotangens (viz pátá kapitola) a základní vztahy mezi nimi. Vzhledem k tomu, že ve většině případů lze goniometrické rovnice řešit pouze numericky, omezíme se dále jen na jednoduché typy těchto rovnic.

Goniometrickou rovnicí nazýváme rovnici, která obsahuje neznámou v argumentu některé z goniometrických funkcí (funkce sinus, kosinus, tangens, kotangens).

Řešit goniometrickou rovnici znamená najít všechny orientované úhly, které dané rovnici vyhovují. Vzhledem k periodičnosti goniometrických funkcí mají goniometrické rovnice zpravidla nekonečně mnoho řešení, pokud nespecifikujeme interval, v němž hledáme konkrétní řešení.

Při řešení nejčastěji postupujeme tak, že pomocí vhodných úprav převedeme danou rovnici na některou ze základních goniometrických rovnic

$$\sin x \,(\text{resp. } \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{cotg} x) = k,$$

kde $k \in \mathbb{R}$. Dále najdeme ostrý úhel x_0, pro který platí

$$\sin x_0 \,(\text{resp. } \cos x_0, \operatorname{tg} x_0, \operatorname{cotg} x_0) = |k|.$$

Prostřednictvím úhlu x_0 pak určíme základní úhly $x \in \langle 0; 2\pi)$, které dané rovnici vyhovují a ostatní kořeny rovnice dopočteme na základě periodičnosti.

Příklad 2.25: Řešme v reálném oboru rovnici $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Nejprve najdeme ostrý úhel x_0, pro který platí $\cos x_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Tedy $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$. Kosinus je záporný ve II. a III. kvadrantu, základní orientované úhly v tomto případě tedy budou

$$x_1 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi, \quad x_2 = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7}{6}\pi.$$

Vzhledem ke skutečnosti, že kosinus je 2π-periodická funkce, budou mít všechna řešení dané rovnice podobu

$$x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, \quad \text{nebo} \quad x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$K = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{ \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \right\}.$$

☺

Příklad 2.26: Řešme v reálném oboru rovnici $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - 2x\right) = \dfrac{1}{2}$.

Substitucí $y = \frac{\pi}{2} - 2x$ získáme základní goniometrickou rovnici $\sin y = \frac{1}{2}$. Pro $y_0 \in \langle 0; \frac{\pi}{2})$ platí $\sin y_0 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow y_0 = \frac{\pi}{6}$. Funkce sinus je kladná v I. a II. kvadrantu, odkud plyne

$$y_1 = \frac{\pi}{6}, \qquad y_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$$

a celkem $y = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, resp. $y = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Vrátíme se zpět k substituci $y = \frac{\pi}{2} - 2x$ a dostáváme

$$\begin{aligned} \tfrac{\pi}{2} - 2x &= \tfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ -2x &= -\tfrac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x &= \tfrac{\pi}{6} - k\pi \end{aligned} \qquad \text{resp.} \qquad \begin{aligned} \tfrac{\pi}{2} - 2x &= \tfrac{5}{6}\pi + 2k\pi \\ -2x &= \tfrac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x &= -\tfrac{\pi}{6} - k\pi \end{aligned}$$

$$K = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{6} - k\pi, -\frac{\pi}{6} - k\pi \right\}.$$

☺

Příklad 2.27: Řešme v reálném oboru rovnici $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Substitucí $y=x+\dfrac{\pi}{3}$ získáme základní goniometrickou rovnici $\operatorname{tg} y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Pro $y_0 \in \langle 0; \frac{\pi}{2})$ platí $\operatorname{tg} y_0 = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow y_0 = \frac{\pi}{6}$. Vzhledem ke skutečnosti, že tangens je π-periodická funkce, budou mít všechna řešení dané rovnice podobu

$$y=\frac{\pi}{6}+k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Vrátíme se zpět k substituci $y=x+\dfrac{\pi}{3}$ a dostáváme

$$x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+k\pi, \text{ odkud plyne } x=-\frac{\pi}{6}+k\pi, \text{ a tedy } K=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{-\frac{\pi}{6}+k\pi\right\}.$$

☺

Příklad 2.28: Řešme v reálném oboru rovnici $\sin x + \sin 2x = 0$.

S využitím vztahu $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ rovnici upravíme do tvaru

$$\sin x + 2\sin x \cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x(1+2\cos x)=0.$$

Odtud plyne $\sin x = 0$ nebo $1+2\cos x = 0$. Řešíme tedy dvě základní goniometrické rovnice a dostáváme:

$$\begin{aligned} \sin x = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x = k\pi, \\ \cos x = -\tfrac{1}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad x = \tfrac{2}{3}\pi + 2k\pi \qquad \text{nebo} \qquad x = \tfrac{4}{3}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$K=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{k\pi, \frac{2}{3}\pi+2k\pi, \frac{4}{3}\pi+2k\pi\right\}.$$

☺

Cvičení

Cvičení 2.12: Najděte všechna reálná řešení rovnic:

a) $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

b) $\operatorname{cotg} x + \sqrt{3} = 0$,

c) $\operatorname{tg}\frac{3}{4}\pi + \operatorname{tg}\frac{x}{2} = 0$,

d) $2\cos x - \sqrt{2} = 0$,

e) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$,

f) $\cos\left(\frac{x}{2} + \pi\right) = 1$,

g) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

h) $\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -1$,

i) $\sin^2 x - 3\sin x = 0$,

j) $\sin^2 x - \frac{1}{2}\sin x = 0$,

k) $\sin 2x + \cos 2x = -1$,

l) $\log(\sin x) = 0$.

Cvičení 2.13: Najděte všechna reálná řešení rovnic:

a) $\sin^2 x + \sin x - \cos^2 x = 0$,

b) $\operatorname{tg}^2 x = \dfrac{2}{\cos^2 x} - 3$,

c) $2\sin^2 x = 2 - \operatorname{cotg} x$,

d) $\cos 5x(\cos x + \cos 3x) = 0$,

e) $\sin x + \sin 2x = \operatorname{tg} x$,

f) $\sin^2 x - 4\sin x + 4 = 0$,

g) $2\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x = 0$,

h) $\sin^2 x - (1+\sqrt{3})\sin x\cos x + \sqrt{3}\cos^2 x = 0$.

2.4 Rovnice s absolutní hodnotou

Absolutní hodnota reálného čísla a je definována takto:

$$|a| = a \quad \text{pro} \quad a \geq 0, \qquad |a| = -a \quad \text{pro} \quad a < 0\,. \tag{2.7}$$

Geometrický význam absolutní hodnoty: Číslo $|a|$ odpovídá vzdálenosti obrazu čísla a na číselné ose od počátku.

K řešení rovnic s absolutní hodnotou nejčastěji používáme metodu nulových bodů. Určíme hodnoty proměnné x, pro které absolutní hodnoty (které se v rovnici vyskytují) nabývají nulové hodnoty, a pomocí těchto tzv. nulových bodů rozdělíme reálnou osu na dílčí intervaly (jejich počet závisí na počtu nulových bodů). V jednotlivých intervalech pak řešíme danou rovnici po odstranění absolutních hodnot. Vše si ukážeme na příkladech:

Příklad 2.29: Řešme v reálném oboru rovnici $|x-3| = 2x+7$.

Nulovým bodem absolutní hodnoty v této rovnici je $x = 3$.

Za předpokladu $x - 3 < 0$ platí $|x-3| = -(x-3)$ a danou rovnici lze přepsat do podoby $-(x-3) = 2x+7$, odkud plyne $x = -\frac{4}{3}$. Tato hodnota splňuje podmínku $x - 3 < 0$, jde tedy o kořen dané rovnice.

Dále vyřešíme případ $x - 3 \geq 0$, pro který platí $|x-3| = x-3$ a rovnice má podobu $x - 3 = 2x + 7$, odkud vychází $x = -10$. Ovšem $-10 \notin \langle 3, \infty)$, nejde tedy o kořen zadané rovnice. Celkem dostáváme $K = \{-\frac{4}{3}\}$. ☺

Příklad 2.30: Řešme v reálném oboru rovnici $|x-1| + 2|2-x| = 5$.

Nulovými body jsou hodnoty 1, 2. Pro lepší přehlednost si můžeme vše zapsat formou tabulky:

	$\|x-1\|$	$\|2-x\|$	$\|x-1\|+2\|2-x\|=5$
$x \in (-\infty; 1)$	$1-x$	$2-x$	$1-x+2(2-x)=5$
$x \in \langle 1; 2)$	$x-1$	$2-x$	$x-1+2(2-x)=5$
$x \in \langle 2; \infty)$	$x-1$	$x-2$	$x-1+2(x-2)=5$

V případě $x \in (-\infty; 1)$ má tedy rovnice přepsaná bez absolutních hodnot podobu

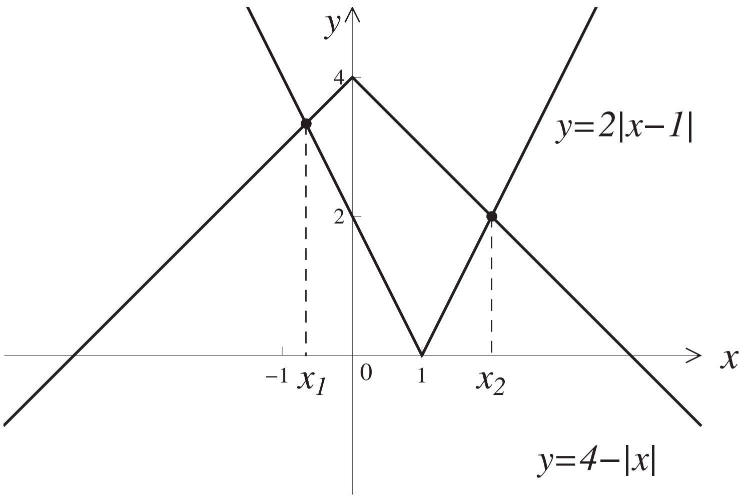
$$1 - x + 2(2-x) = 5,$$

odkud dostáváme $x = 0$. Protože $0 \in (-\infty; 1)$, je nula kořenem dané rovnice.

Pro $x \in \langle 1; 2)$ má rovnice tvar $x - 1 + 2(2 - x) = 5$, odkud $x = -2$, ale $-2 \notin \langle 1; 2)$.
Konečně pro $x \in \langle 2; \infty)$ řešíme rovnici $x - 1 + 2(x - 2) = 5$, jíž vyhovuje $x = \frac{10}{3}$, přičemž $\frac{10}{3} \in \langle 2; \infty)$.
Celkově má zadaná rovnice dvě řešení: $K = \{0, \frac{10}{3}\}$. ☺

Příklad 2.31: Určeme graficky počet kořenů rovnice $4 - |x| = 2|x - 1|$.

Do jednoho obrázku (viz Obr. 2.3) sestrojíme grafy funkcí $y = 4 - |x|$ a $y = 2|x - 1|$. Řešení dané rovnice pak najdeme jako x-ové souřadnice průsečíků grafů obou funkcí. Vidíme, že



Obrázek 2.3: Grafické řešení rovnice $4 - |x| = 2|x - 1|$.

rovnice má dva kořeny x_1, x_2. Výpočtem můžeme, podobně jako v předchozím příkladě, ověřit, že $x_1 = -\frac{2}{3}$ a $x_2 = 2$. ☺

Cvičení

Cvičení 2.14: Řešte rovnice v $\mathbb{R}$:

a) $|7 - x| = 5$,

b) $|x - 4| = 2 - x$,

c) $|x - 1| = 3$,

d) $|4 - 3x| = 4 - 3x$,

e) $|2x - 1| = 1 - 2x$,

f) $|x - 8| = 4 - 2x$.

Cvičení 2.15: Najděte všechna reálná řešení rovnic:

a) $|x - 2| = |x| + 2$,

b) $|3 - 2x| - |x - 1| = 2 - x$

c) $|x + 1| + |2 - x| + 2|x| = 3$,

d) $|3x - 4| = \frac{5}{2}$,

e) $|1 - 2x| = 2$,

f) $|x - 2| - |x - 1| + |3 + x| = 0$,

g) $|x - 4| = 3|x + 2|$,

h) $|x - 1| - |2 - x| = -1$,

i) $|x - a| = 3$, $a \in \mathbb{R}$,

j) $|x - 2| = b$, $b \in \mathbb{R}$.

Cvičení 2.16: Řešte graficky rovnice:

a) $|x-3| = 4$, **b)** $|2-x| = x-3$,

c) $1-|x| = x+1$, **d)** $|1-x^2| = 1$.

2.5 Soustavy rovnic

2.5.1 Soustavy lineárních rovnic o více neznámých

Soustavou dvou lineárních rovnic o dvou neznámých x, y nazýváme soustavu

$$\begin{array}{rcrcl} a_1x & + & b_1y & = & c_1 \\ a_2x & + & b_2y & = & c_2, \end{array}$$

kde a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 jsou reálná čísla.

Při řešení soustav dvou lineárních rovnic nejčastěji používáme libovolnou z následujících metod (obvykle volíme tu, která je pro danou soustavu jednodušší):

1. Metoda dosazovací: z jedné rovnice soustavy vyjádříme jednu z neznámých a **dosadíme** její vyjádření do druhé rovnice, čímž získáme lineární rovnici s jednou neznámou, kterou vyřešíme; získané číslo dosadíme do libovolné rovnice soustavy a dopočteme zbývající neznámou (viz Příklad 2.32).

2. Metoda sčítací: obě rovnice soustavy vynásobíme vhodnými nenulovými čísly tak, aby koeficienty u x nebo u y v jednotlivých rovnicích byly opačnými čísly; takto upravené rovnice **sečteme**, čímž získáme lineární rovnici s jednou neznámou a dále postupujeme stejně jako při metodě dosazovací (viz Příklad 2.33).

Příklad 2.32: Řešme soustavu rovnic v reálném oboru:

$$\begin{array}{rcrcl} 3x & - & 7y & = & 15 \\ -6x & - & y & = & 0. \end{array}$$

Soustavu vyřešíme dosazovací metodou – z druhé rovnice vyjádříme neznámou $y = -6x$, dosazením do první rovnice odtud dostaneme rovnici

$$3x - 7 \cdot (-6x) = 15,$$

jejímž řešením je $x = \frac{1}{3}$ (Ověřte sami!). Jestliže tuto hodnotu nyní dosadíme do vyjádření y, dostaneme $y = -6 \cdot \frac{1}{3} = -2$. Daná soustava má tedy jediné řešení $x = \frac{1}{3}$ a $y = -2$, neboli její řešení je jediná uspořádaná dvojice čísel $(x, y) = \left(\frac{1}{3}, -2\right)$, tedy

$$K = \{(\tfrac{1}{3}, -2)\}.$$

☺

Příklad 2.33: Řešme v reálném oboru soustavu rovnic:

$$\begin{array}{rcrcl} 4x & - & 2y & = & -1 \\ 9x & + & 3y & = & 0. \end{array}$$

Soustavu vyřešíme sčítací metodou. Po vynásobení první rovnice třemi a druhé rovnice dvěma dostaneme soustavu

$$\begin{array}{rcrcr} 12x & - & 6y & = & -3 \\ 18x & + & 6y & = & 0. \end{array}$$

Sečtením levých a pravých stran těchto rovnic získáme rovnici o jedné neznámé $30x = -3$, odkud snadno vypočteme $x = -\frac{1}{10}$. Po dosazení např. do první rovnice soustavy platí $4 \cdot (-\frac{1}{10}) - 2y = -1 \Leftrightarrow y = \frac{3}{10}$. Řešením dané soustavy je jediná uspořádaná dvojice $(x, y) = (-\frac{1}{10}, \frac{3}{10})$, tj. $K = \{(-\frac{1}{10}, \frac{3}{10})\}$. ☺

Příklad 2.34: Řešme v reálném oboru soustavu rovnic:

$$\begin{array}{rcrcl} 0,24(x-3) & + & 0,18(2-y) & = & 0,36 \\ 0,2(x-2) & - & 0,15(y-\frac{20}{3}) & = & 0,7. \end{array}$$

Soustavu nejprve upravíme pomocí roznásobení závorek:

$$\begin{array}{rcl} 0,24x - 0,72 + 0,36 - 0,18y & = & 0,36 \\ 0,2x - 0,4 - 0,15y + 1 & = & 0,7 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcrcl} 0,24x & - & 0,18y & = & 0,72 \\ 0,2x & - & 0,15y & = & 0,1. \end{array}$$

Vydělíme-li první rovnici soustavy číslem 0,06 a druhou rovnici číslem 0,05, obdržíme soustavu

$$\begin{array}{rcrcr} 4x & - & 3y & = & 12 \\ 4x & - & 3y & = & 2. \end{array}$$

Odtud je již zřejmé, že obě rovnice nelze splnit současně – daná soustava rovnic nemá žádné řešení, tedy $K = \emptyset$. ☺

Příklad 2.35: Řešme v reálném oboru soustavu rovnic:

$$\begin{array}{rcrcl} 2(x-1) & - & 3(1-y) & = & 5 \\ 3(2x-3) & + & 3(3y-6) & = & 3. \end{array}$$

Roznásobením závorek soustavu nejprve upravíme do podoby:

$$\begin{array}{rcl} 2x - 2 - 3 + 3y & = & 5 \\ 6x - 9 + 9y - 18 & = & 3 \end{array}, \quad \text{tedy} \quad \begin{array}{rcl} 2x + 3y & = & 10 \\ 6x + 9y & = & 30. \end{array}$$

Nyní si buď všimneme, že jsou obě rovnice stejné (liší se pouze násobkem tří a tedy představují jednu rovnici), anebo dále použijeme sčítací metodu. Po vynásobení první rovnice (-3) a přičtení k rovnici druhé získáme rovnici

$$(-6+6)x + (-9+9)y = -30 + 30,$$

tedy $0 = 0$, která je vždy platná. Zvolíme-li libovolné reálné x, lze vždy druhou neznámou vyjádřit ve tvaru

$$y = \frac{10-2x}{3}.$$

Soustava má nekonečně mnoho řešení $x \in \mathbb{R}$, $y = \frac{10-2x}{3}$, tj. $K = \left\{\left(x, \frac{10-2x}{3}\right); x \in \mathbb{R}\right\}$. ☺

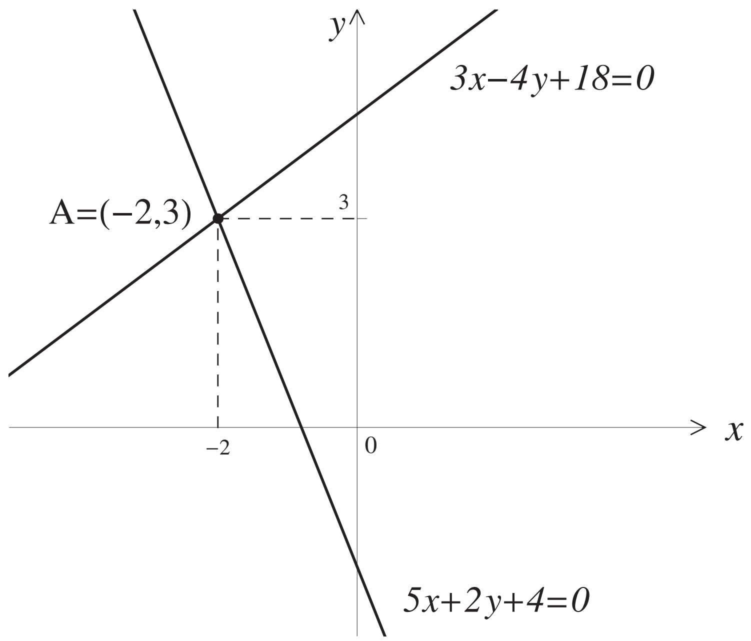
Příklad 2.36: Znázorněme graficky řešení soustavy rovnic:

$$\begin{array}{rcrcl} 3x & - & 4y & = & -18 \\ 5x & + & 2y & = & -4. \end{array}$$

Do téhož souřadnicového systému vyneseme přímky o rovnicích

$$3x - 4y = -18 \qquad \text{a} \qquad 5x + 2y = -4.$$

Řešením soustavy jsou souřadnice průsečíku $A = (-2, 3)$ obou přímek, viz Obrázek 2.4.



Obrázek 2.4: Obrázek k Příkladu 2.36.

☺

Příklad 2.37: Řešme v reálném oboru soustavu rovnic vzhledem k reálnému parametru t:

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & ty & = & 1 \\ tx & + & y & = & t. \end{array}$$

Vyjádřením neznámé $x = 1 - ty$ z první rovnice a dosazením do druhé rovnice obdržíme rovnici

$$\begin{aligned} t(1-ty) + y &= t \\ t - t^2y + y &= t \ / - t \\ y(1-t^2) &= 0. \end{aligned}$$

- Pro $t \neq \pm 1$ má tato rovnice jediné řešení $y = 0$, jemuž odpovídá $x = 1 - t \cdot 0 = 1$. Soustavu splňuje pouze uspořádaná dvojice $(x, y) = (1, 0)$, tj. $K = \{(1, 0)\}$.

- Je-li $t = +1$ nebo $t = -1$, je řešením této rovnice libovolné reálné y a daná soustava má tedy nekonečně mnoho řešení: pro $t = 1$ jsou to všechny uspořádané dvojice $x = 1 - y$, $y \in \mathbb{R}$, tj. $K = \{(1 - y, y); y \in \mathbb{R}\}$, pro $t = -1$ jsou řešením všechny uspořádané dvojice $x = 1 + y$, $y \in \mathbb{R}$, tj. $K = \{(1 + y, y); y \in \mathbb{R}\}$.

Celkem lze výsledek shrnout v podobě tabulky:

t	$K(t)$
$t = +1$	$\{(1 - y, y), y \in \mathbb{R}\}$
$t = -1$	$\{(1 + y, y), y \in \mathbb{R}\}$
$t \neq \pm 1$	$\{(1, 0)\}$

☺

Při řešení soustav tří lineárních rovnic o třech neznámých postupujeme analogicky jako v případě soustav dvou rovnic o dvou neznámých, jednotlivé metody zde proto nebudeme znovu popisovat, ale ukážeme si přímo jejich použití na konkrétním příkladě.

Příklad 2.38: Řešme v reálném oboru soustavu rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 3z & = & 12 \\ x & - & 2y & - & z & = & 9 \\ 3x & & & + & 2z & = & 15. \end{array}$$

Z první rovnice si můžeme např. vyjádřit $y = 2x + 3z - 12$. Po dosazení do druhé a třetí rovnice dostaneme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$$\begin{array}{rcrcr} -3x & - & 7z & = & -15 \\ 3x & + & 2z & = & 15. \end{array}$$

Odtud sečtením obou rovnic plyne $z = 0$; z třetí rovnice $3x + 2 \cdot 0 = 15$ potom plyne $x = 5$. Zpětným dosazením pak $y = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 0 - 12 = -2$. Zjistili jsme, že daná soustava má právě jediné řešení – uspořádanou trojici $(x, y, z) = (5, -2, 0)$,

$$K = \{(5, -2, 0)\}.$$

☺

Cvičení

Cvičení 2.17: Najděte v reálném oboru všechna řešení soustav rovnic:

a) $\begin{array}{rcrcr} -2x & + & 4y & = & -2 \\ 3x & - & 6y & = & 3, \end{array}$ **b)** $\begin{array}{rcrcr} 3x & + & 3y & = & -1 \\ 4x & + & 2y & = & 0, \end{array}$ **c)** $\begin{array}{rcrcr} 5x & - & 2y & = & -5 \\ 3x & + & y & = & 8, \end{array}$

d) $\begin{array}{rcrcr} 8x & - & 3y & = & 2 \\ 9y & - & 24x & = & 5, \end{array}$ **e)** $\begin{array}{rcrcr} 3x & - & 5y & = & -14 \\ x & + & 4y & = & 1, \end{array}$ **f)** $\begin{array}{rcrcr} 4x & - & 3y & = & 6 \\ -16x & + & 12y & = & -24. \end{array}$

Cvičení 2.18: Najděte v reálném oboru všechna řešení soustav rovnic:

a) $\dfrac{2}{x-y} = \dfrac{16}{2y}, \quad \dfrac{18}{x+y} = \dfrac{12}{y+2},$ **b)** $\begin{array}{rcrcr} 0,2(x-3) & - & 0,3(y+1) & = & -0,79 \\ 2,1x & + & 0,5(4-y) & = & 7,66, \end{array}$

c) $\begin{array}{rcrcl} 4(x-3) & - & 2(1-y) & = & -2 \\ 6(2-x) & + & 4(y+3) & = & -8, \end{array}$ **d)** $\begin{array}{rcrcl} \sqrt{3}x & + & \sqrt{2}y & = & 5 \\ x & - & y+\sqrt{2} & = & \sqrt{3}, \end{array}$

e) $\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 4y & - & 3z & = & 15 \\ x & - & y & + & 5z & = & 10 \\ -x & - & 2y & + & 8z & = & 25, \end{array}$ **f)** $\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & - & 4z & = & 5 \\ 4x & + & y & - & 2z & = & 7 \\ -2x & + & 4y & + & 10z & = & -8. \end{array}$

Cvičení 2.19: Proveďte diskusi řešitelnosti následujících soustav v reálném oboru vzhledem k reálnému parametru t:

a) $\begin{array}{rcrcl} 2x & + & ty & = & 3 \\ tx & - & y & = & 5, \end{array}$ **b)** $\begin{array}{rcrcl} x & - & ty & = & 8 \\ 2x & + & y & = & 4. \end{array}$

2.5.2 Další příklady soustav dvou rovnic o dvou neznámých

Často potřebujeme řešit soustavu dvou rovnic o dvou neznámých i v případě, kdy nejde o rovnice lineární. Postup řešení pak závisí na skutečnosti, o jaký typ rovnic jde.

Na konkrétních příkladech si předvedeme řešení soustavy lineární a kvadratické rovnice, dvou kvadratických rovnic, resp. dvou iracionálních rovnic o dvou neznámých.

Příklad 2.39: Řešme v reálném oboru soustavu rovnic:

$$\begin{array}{rcrcl} x^2 & + & y^2 & = & 10 \\ x & + & y & = & -2. \end{array}$$

Řešíme-li soustavu lineární a kvadratické rovnice o dvou neznámých, je vhodné jednu z neznámých z rovnice lineární vyjádřit a dosadit do rovnice kvadratické. V našem případě z druhé rovnice dostáváme $x = -2 - y$, odkud po dosazení do první rovnice získáme kvadratickou rovnici s neznámou y, kterou vyřešíme:

$$\begin{array}{rcl} (-2-y)^2 + y^2 & = & 10 \\ 4 + 4y + y^2 + y^2 & = & 10 \;/ -10 \\ 2y^2 + 4y - 6 & = & 0 \;/ : 2 \\ y^2 + 2y - 3 & = & 0. \end{array}$$

Odtud $y_1 = -3$, $y_2 = 1$. Druhou neznámou pak již snadno dopočteme:

$$\begin{array}{lcl} y_1 = -3 & \Rightarrow & x_1 = -2 + 3 = 1 \\ y_2 = 1 & \Rightarrow & x_2 = -2 - 1 = -3. \end{array}$$

Řešením dané soustavy jsou uspořádané dvojice $(x_1, y_1) = (1, -3)$ a $(x_2, y_2) = (-3, 1)$, $K = \{(1, -3), (-3, 1)\}$. Znázorněte si danou soustavu graficky! ☺

Příklad 2.40: Řešme v reálném oboru soustavu rovnic:

$$\begin{array}{rcrcl} x^2 & + & 2y^2 & = & 17 \\ 2x^2 & - & 4y^2 & = & 30. \end{array}$$

Pro řešení použijeme sčítací metodu: vynásobíme-li první rovnici dvěma, pak jejím přičtením ke druhé rovnici dostaneme vztah $4x^2 = 64$, který platí pro $x_{1,2} = \pm 4$. Dosazením hodnoty $x_1 = 4$ nebo $x_2 = -4$ do první rovnice dostaneme vždy stejnou rovnici

$$16 + 2y^2 = 17\,, \qquad \text{která má řešení} \qquad y_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Celkem má tedy daná soustava čtyři řešení,

$$K = \left\{ \left(4, \sqrt{\frac{1}{2}}\right), \left(4, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right), \left(-4, \sqrt{\frac{1}{2}}\right), \left(-4, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right) \right\}.$$

☺

Příklad 2.41: Řešme v reálném oboru soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+y} \;-\; \sqrt{x-y} &= -2 \\ \sqrt{x+y} \;+\; 2\sqrt{x-y} &= 16. \end{aligned}$$

Tuto soustavu převedeme pomocí substituce $u = \sqrt{x+y}$, $v = \sqrt{x-y}$ na soustavu dvou lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} u - v &= -2 \\ u + 2v &= 16, \end{aligned}$$

kterou vyřešíme např. dosazovací metodou. Dosazením $u = -2+v$ z první rovnice do druhé dostaneme $(-2+v) + 2v = 16$, tedy $v = 6$, odkud zpětně plyne $u = -2+6 = 4$.
Nyní se vrátíme k naší substituci:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+y} &= 4 \;/^2 \\ \sqrt{x-y} &= 6 \;/^2 \end{aligned}$$

a opět řešíme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} x + y &= 16 \\ x - y &= 36, \end{aligned}$$

jejímž řešením je dvojice $x = 26$, $y = -10$. Nutnou zkouškou se přesvědčíme, že tato čísla dané soustavě vyhovují.

☺

Cvičení

Cvičení 2.20: Najděte v reálném oboru všechna řešení soustav rovnic:

a) $$\begin{aligned} x - 2y &= 0 \\ x^2 - y^2 - 4x + 2y &= 4, \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 3\sqrt{x+y} - 2\sqrt{x-y} &= 2 \\ -\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} &= 2, \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} (x-3)^2 + (y+12)^2 &= 100 \\ 3x - 4y - 7 &= 0, \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 5 &= 0 \\ x - 3y + 5 &= 0, \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 2x - 2y &= 3 \\ x^2 + y^2 + 13x + 9y + 30 &= 0, \end{aligned}$$

f) $$\begin{aligned} (x-17)^2 + (y-17)^2 &= 289 \\ (x-5)^2 + (y-5)^2 &= 25, \end{aligned}$$

g) $$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2x - 2y &= 2 \\ (x-7)^2 + y^2 &= 9, \end{aligned}$$

h) $$\begin{aligned} (x-3)^2 + (y-1)^2 &= 7 \\ x(4x-24) + 4y(y-2) &= -12. \end{aligned}$$

Kapitola 3

Řešení nerovnic

Při řešení nerovnic postupujeme analogicky jako při řešení rovnic. Je však třeba zdůraznit skutečnost, že **násobení nerovnice záporným číslem „obrátí“ znamení nerovnosti!** Vzhledem k tomu, že množina řešení nerovnice bývá velmi často nekonečná, bývá provedení zkoušky obtížné. Je proto nutné pečlivě dbát na podmínky, za kterých má daná nerovnice smysl a její úpravy jsou ekvivalentní.

3.1 Lineární nerovnice a jejich soustavy

Příklad 3.1: Řešme nerovnici $3(x-1)+3(3-x)-3(x-2) \geq x+8$
a) v oboru reálných čísel,
b) v oboru přirozených čísel.

Postupnými ekvivalentními úpravami dostaneme:

$$\begin{aligned} 3x-3+9-3x-3x+6 &\geq x+8 \\ -3x+12 &\geq x+8 \\ -4x &\geq -4 \;/:(-4) \\ x &\leq 1. \end{aligned}$$

a) Množinou všech řešení v oboru reálných čísel je interval $K = (-\infty; 1\rangle$.
b) Danou nerovnici splňuje jediné přirozené číslo: $K = \{1\}$. ☺

Příklad 3.2: Řešme v reálném oboru nerovnici $(x-8)^2 - 3(x-4) \geq (x-4)(x+1)$.

Pomocí ekvivalentních úprav dostaneme:

$$\begin{aligned} x^2-16x+64-3x+12 &\geq x^2+x-4x-4 \;/-x^2 \\ -19x+76 &\geq -3x-4 \;/+3x-76 \\ -16x &\geq -80 \;/:(-16) \\ x &\leq 5. \end{aligned}$$

Množina kořenů $K = (-\infty; 5\rangle$. ☺

Při řešení soustavy lineárních nerovnic postupujeme zpravidla tak, že vyřešíme každou nerovnici zvlášť a množinu řešení dané soustavy určíme jako průnik všech množin řešení jednotlivých nerovnic.

Příklad 3.3: Řešme v reálném oboru soustavu nerovnic:
$$\begin{aligned} 3x - 5 &\geq 0 \\ 2x + 1 &< 0. \end{aligned}$$

První nerovnice je splněna pro $x \geq \frac{5}{3}$, druhá platí pro $x < -\frac{1}{2}$. Žádné reálné číslo x, které

Obrázek 3.1: Ilustrace k Příkladu 3.3.

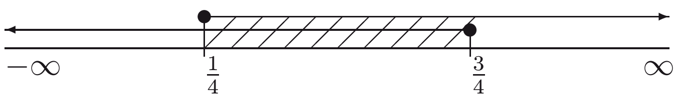
by splňovalo obě tyto podmínky (viz Obr. 3.1), však neexistuje – daná soustava nerovnic nemá žádné řešení, $K = \emptyset$.

Příklad 3.4: Řešme v reálném oboru soustavu nerovnic $-1 \leq 2 - 4x \leq 1$.

Danou soustavu splňují všechny hodnoty x, pro které platí

$$-1 \leq 2 - 4x \qquad \text{a současně} \qquad 2 - 4x \leq 1,$$

tedy ty hodnoty x, pro které platí $\frac{3}{4} \geq x$ a zároveň $x \geq \frac{1}{4}$. Množina všech řešení dané



Obrázek 3.2: Ilustrace k Příkladu 3.4.

soustavy (viz Obr. 3.2) je průnikem intervalů $(-\infty; \frac{3}{4}\rangle$ a $\langle\frac{1}{4}; \infty)$, tedy $K = \langle\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\rangle$.

Cvičení

Cvičení 3.1: Najděte všechna reálná řešení nerovnic (a množinu řešení znázorněte na číselné ose):

a) $3(x - 4) - 4x \leq 2(1 - x) + x$,

b) $4(1 - 2x) + 8x \leq 1$,

c) $7(3 - 2x) \geq x - 8$,

d) $4 - 3x < 2(x - 5)$,

e) $\frac{3}{2}(2 - x) > \frac{1}{3}(x - 2)$,

f) $0,2(4x - 3,1) \leq 0,3(2 - 0,1x)$,

g) $1 - 4x \geq 5 + 3x$,

h) $8 - 6x < 4 + 4x$.

Cvičení 3.2: Najděte všechna reálná řešení nerovnic:

a) $\dfrac{3-4x}{5}+2x-\dfrac{x-1}{7}-5>x-2,$ **b)** $\dfrac{x-5}{4}+\dfrac{3-x}{6}-\dfrac{2x-1}{3}<0,$

c) $(x-1)^2+(2x+5)^2\le 8+5(x-4)^2,$ **d)** $\pi x+4\le\dfrac{\pi}{2}(1-x)+2\pi,$

e) $\sqrt{7}(x-1)-\sqrt{2}(1+x)<x,$ **f)** $\dfrac{\pi}{4}(x-2)\ge(3-x)\dfrac{\pi}{3}.$

Cvičení 3.3: Najděte všechna reálná řešení soustav nerovnic:

a) $-1\le 3-x\le 1,$ **b)** $-\frac{\pi}{2}\le 2x-\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{2},$ **c)** $0<9-5x<1,$

d) $\begin{array}{rcl}\frac{1}{2}(x+1)&<&3-x\\ \frac{1}{2}&\ge&1-x,\end{array}$ **e)** $\frac{\pi}{2}(x-1)>\pi x-\frac{\pi}{4}>0,$ **f)** $\begin{array}{rcl}0,4(x-4)&\le&0,3x\\ 1-2x&\le&5.\end{array}$

3.2 Nerovnice s absolutní hodnotou

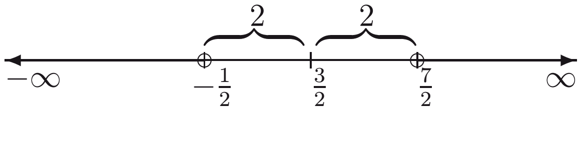
Při řešení nerovnic s absolutní hodnotou postupujeme analogicky jako v případě takových rovnic. Postupy si ukážeme na konkrétních příkladech.

Příklad 3.5: Řešme v reálném oboru nerovnici $|x-7|\le 4$.

Danou nerovnici s absolutní hodnotou můžeme zapsat rovněž v podobě soustavy dvou lineárních nerovnic $-4\le x-7\le 4$, které vyhovují všechna x, pro která $3\le x\le 11$, tj. $K=\langle 3;11\rangle$.
Poznamenejme, že na tuto úlohu můžeme nahlížet geometricky. Absolutní hodnota rozdílu dvou čísel je totiž rovna vzdálenosti jejich obrazů na číselné ose. Nerovnici $|x-7|\le 4$ vyhovují všechna čísla x, jejichž obrazy na číselné ose mají vzdálenost od obrazu čísla 7 na číselné ose menší nebo rovnu 4, tj. čísla z intervalu $\langle 3;11\rangle$. Znázorněte množinu kořenů na číselné ose!

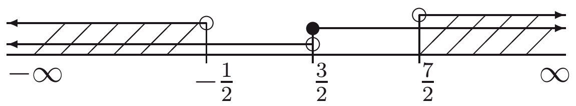
Příklad 3.6: Řešme v reálném oboru nerovnici $|2x-3|>4$.

a) Vydělíme-li danou nerovnici dvěma, dostaneme nerovnici $\left|x-\frac{3}{2}\right|>2$, kterou opět můžeme řešit geometricky (viz Obr. 3.3). Jejím řešením jsou všechna čísla x, jejichž obrazy na číselné ose mají vzdálenost od obrazu čísla $\frac{3}{2}$ větší než 2, tj. čísla z množiny $(-\infty;-\frac{1}{2})\cup(\frac{7}{2};\infty)$.



Obrázek 3.3: Ilustrace k příkladu 3.6a).

b) Rovnici vyřešíme i jiným způsobem. Provedeme diskusi různých možností znamének výrazu v absolutní hodnotě a vyřešíme vzniklé nerovnice bez absolutní hodnoty.
Pro $x\in(-\infty;\frac{3}{2})$ platí $|2x-3|=-(2x-3)=3-2x$; v tomto případě tedy řešíme

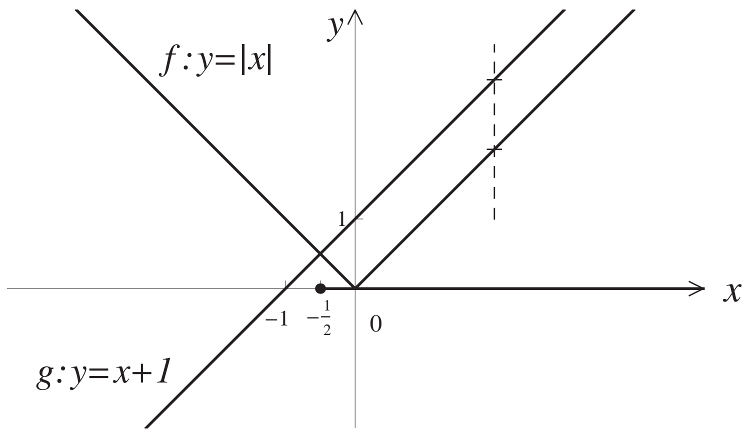


Obrázek 3.4: Ilustrace k příkladu 3.6b).

nerovnici $3 - 2x > 4$, odkud dostáváme $x < -\frac{1}{2}$.
Pro $x \in \langle \frac{3}{2}; \infty)$ je $|2x - 3| = 2x - 3$ a my řešíme nerovnici $2x - 3 > 4$, jíž vyhovují hodnoty $x > \frac{7}{2}$. Celkem dostáváme (viz Obr. 3.4) množinu kořenů $K = (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (\frac{7}{2}; \infty)$. ☺

Příklad 3.7: Řešme graficky v reálném oboru nerovnici $|x| \leq x + 1$.

Sestrojíme grafy funkcí $f(x) = |x|$ a $g(x) = x + 1$. Řešením dané nerovnice jsou ty hodnoty x, pro které platí, že $f(x) \leq g(x)$, tj. ty hodnoty x, pro které příslušný bod grafu funkce f je totožný s bodem grafu funkce g nebo bod grafu funkce f leží pod bodem grafu funkce g se stejnou x-ovou souřadnicí (viz Obr. 3.5). Platí tedy $K = \langle -\frac{1}{2}; \infty)$.



Obrázek 3.5: Obrázek k Příkladu 3.7.

☺

Příklad 3.8: Řešme v reálném oboru nerovnici $|x| + |2 - x| - |x + 1| \leq 2$.

Řešíme metodou nulových bodů, které jsou v tomto případě tři (0, 2 a -1):

	$\|x\|$	$\|2-x\|$	$\|x+1\|$	$\|x\| + \|2-x\| - \|x+1\| \leq 2$
$x \in (-\infty; -1)$	$-x$	$2 - x$	$-x - 1$	$-x + 2 - x + x + 1 \leq 2$
$x \in \langle -1; 0)$	$-x$	$2 - x$	$x + 1$	$-x + 2 - x - x - 1 \leq 2$
$x \in \langle 0; 2)$	x	$2 - x$	$x + 1$	$x + 2 - x - x - 1 \leq 2$
$x \in \langle 2; \infty)$	x	$x - 2$	$x + 1$	$x + x - 2 - x - 1 \leq 2$

Pro $x < -1$ řešíme lineární nerovnici $-x + 2 - x + x + 1 \leq 2$, tedy $-x + 1 \leq 0$, které vyhovují $x \geq 1$. Protože $(-\infty; -1) \cap \langle 1; \infty) = \emptyset$, v daném intervalu nedostáváme žádné řešení, $K_1 = \emptyset$.

Pro $x \in \langle -1; 0)$ řešíme nerovnici $-x + 2 - x - x - 1 \leq 2$, která platí pro $x \geq -\frac{1}{3}$. Protože $\langle -1; 0) \cap \langle -\frac{1}{3}; \infty) = \langle -\frac{1}{3}; 0)$, dostáváme část množiny řešení $K_2 = \langle -\frac{1}{3}; 0)$.

V případě $x \in \langle 0; 2)$ má daná nerovnice podobu $x + 2 - x - x - 1 \leq 2$; odtud plyne $x \geq -1$. Platí $\langle 0; 2) \cap \langle -1; \infty) = \langle 0; 2)$, tedy $K_3 = \langle 0; 2)$.

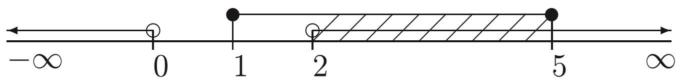
Konečně pro $x \in \langle 2; \infty)$ řešíme lineární nerovnici $x + x - 2 - x - 1 \leq 2$, která je splněna pro $x \leq 5$. Protože $\langle 2; \infty) \cap (-\infty; 5\rangle = \langle 2; 5\rangle$, je $K_4 = \langle 2; 5\rangle$. Celkem dostáváme závěr $K = K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4 = \langle -\frac{1}{3}; 5\rangle$. ☺

Příklad 3.9: Řešme soustavu nerovnic:

a) $\begin{aligned} |x - 3| &\leq 2 \\ |1 - x| &> 1, \end{aligned}$

b) $0 < |x + 9| < 0,1.$

a) První nerovnici vyhovují $x \in \langle 1; 5\rangle$, druhá nerovnice platí pro $x \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$. Množina řešení dané soustavy je průnikem těchto množin (viz Obr. 3.6), tedy $K = (2; 5\rangle$.



Obrázek 3.6: Ilustrace k Příkladu 3.9a).

b) Podmínce $0 < |x + 9|$ vyhovují všechna reálná čísla s výjimkou -9. Druhé nerovnici $|x + 9| < 0,1$ vyhovují všechna $x \in (-9,1; -8,9)$. Obě podmínky současně budou splněny pro $K = (-9,1; -9) \cup (-9; -8,9)$. Znázorněte množinu kořenů na číselné ose! ☺

Cvičení

Cvičení 3.4: Najděte všechna reálná řešení nerovnic:

a) $|\pi - x| \geq \frac{\pi}{4}$

b) $0 < |4 - 3x|$,

c) $0 \geq |x - 2|$,

d) $|3x - 1| \geq \frac{7}{2}$,

e) $|x - 8| \geq 2$,

f) $|x + 3| < -6$,

g) $|x - 2| \geq 3 - 2x$,

h) $|6 + 2x| \leq 1$,

i) $2 - |x| \geq 1$.

Cvičení 3.5: Najděte všechna reálná řešení soustav nerovnic:

a) $0 \leq |x - 2| < 3$,

b) $0 < |3 - x| < 1$,

c) $1 < |x - 4| \leq 2$.

d) $0 < 2 - |x + 1| < 1$,

e) $\begin{aligned} |2 - x| &\leq 3 \\ |x + 1| &\geq 1, \end{aligned}$

f) $\begin{aligned} |x - 4| &\geq 2 \\ 5 &\geq |3 - x|. \end{aligned}$

3.3 Nerovnice součinového a podílového typu

O nerovnicích v součinovém, resp. podílovém tvaru hovoříme v případech, kdy rozhodujeme o tom, zda součin, resp. podíl dvou a více výrazů je kladný (nulový, záporný, nezáporný, nekladný).

Využíváme známých faktů, že

- součin (resp. podíl) dvou výrazů je kladný právě tehdy, jsou-li oba výrazy současně kladné nebo oba výrazy současně záporné;
- součin (resp. podíl) více výrazů je záporný právě tehdy, je-li lichý počet činitelů záporný.

Ukážeme si dvě základní metody řešení:

- rozbor možností (viz Příklad 3.10),
- metodu nulových bodů (viz Příklady 3.11, 3.12).

Využití druhé metody je velmi výhodné především při řešení úloh, kdy nerovnice obsahuje součin nebo podíl více než dvou výrazů; v takových úlohách totiž bývá vyšetřování rozborem všech možností značně komplikované. Rozmyslete si např. všechny možnosti, kdy může být součin tří výrazů nezáporný!

Příklad 3.10: Řešme v reálném oboru nerovnici $(2-x)(2x+1) \leq 0$.

Nerovnici vyřešíme rozborem možností. Hledáme ty hodnoty x, pro které platí

$$[2-x \geq 0 \wedge 2x+1 \leq 0] \qquad \vee \qquad [2-x \leq 0 \wedge 2x+1 \geq 0]$$

První dvě podmínky lze upravit do podoby $x \leq 2$ a současně $x \leq -\frac{1}{2}$, což platí pro $x \in I_1 = (-\infty; -\frac{1}{2}\rangle$. Podobně zbylé dvě podmínky $x \geq 2$ a zároveň $x \geq -\frac{1}{2}$ platí pro $x \in I_2 = \langle 2; \infty)$. Množinu všech řešení dostaneme jako sjednocení intervalů I_1 a I_2. Řešením dané nerovnice je množina $K = (-\infty; -\frac{1}{2}\rangle \cup \langle 2; \infty)$. ☺

Příklad 3.11: Řešme v reálném oboru nerovnici $(4-2x)(x+5) > 0$.

Tentokrát si předvedeme řešení metodou nulových bodů. Výrazy v závorkách jsou rovny nule pro $x = 2$ a $x = -5$. Tyto nulové body rozdělí reálnou osu na tři intervaly, pro které platí

	$(-\infty; -5)$	-5	$(-5; 2)$	2	$(2; \infty)$
$4-2x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$x+5$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(4-2x)(x+5)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Danou nerovnici splňují všechna $x \in (-5; 2)$, $K = (-5; 2)$. ☺

Příklad 3.12: Řešme v reálném oboru nerovnici $\dfrac{x-2}{\ln x} \geq 0$.

Z definičního oboru logaritmické funkce je zřejmé, že nerovnice má smysl jen pro $x > 0$, $x \neq 1$ (potřebujeme, aby $\ln x \neq 0$). Nulové body výrazů v čitateli a jmenovateli jsou $x_1 = 2$ a $x_2 = 1$. Interval $(0; \infty)$ rozdělí nulové body na tři intervaly, pro které platí

	$(0;1)$	$(1;2)$	2	$(2;\infty)$
$x-2$	$-$	$-$	0	$+$
$\ln x$	$-$	$+$	$+$	$+$
$\frac{x-2}{\ln x}$	$+$	$-$	0	$+$

Z posledního řádku tabulky je zřejmé, že nerovnice je splněna pro $K = (0;1) \cup \langle 2;\infty)$. ☺

Příklad 3.13: Řešme v reálném oboru nerovnici $\dfrac{x-3}{3+x} \geq -1$.

a) Prováděním ekvivalentních úprav (pro $x \neq -3$) dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{x-3}{3+x} &\geq -1 \;/ +1 \\ \frac{x-3}{3+x} + 1 &\geq 0 \\ \frac{x-3+x+3}{3+x} &\geq 0 \\ \frac{2x}{3+x} &\geq 0. \end{aligned}$$

Nulový bod čitatele je $x = 0$, nulový bod jmenovatele je $x = -3$. Platí tedy

	$(-\infty;-3)$	$(-3;0)$	$(0;\infty)$
$2x$	$-$	$-$	$+$
$x+3$	$-$	$+$	$+$
$\frac{2x}{x+3}$	$+$	$-$	$+$

To, zda nulové body vyhovují dané nerovnici, snadno zjistíme i bez tabulky, a proto ji tentokrát uvádíme méně podrobnou než u předchozích úloh. Takto zkrácenou podobu tabulky lze použít i v ostatních příkladech. Z posledního řádku tabulky je patrné, že $K = (-\infty;-3) \cup \langle 0;\infty)$.

b) Nyní si ukážeme jiný postup. Nerovnice má smysl pro $x \neq -3$. Za tohoto předpokladu ji můžeme vynásobit výrazem $(3 + x)$; musíme však rozlišit případy, kdy je tento výraz kladný (záporný):

- Pro $x < -3$ platí $3 + x < 0$, při násobení tímto výrazem proto musíme změnit znaménko nerovnosti na opačné:

  $$\begin{aligned} \frac{x-3}{3+x} &\geq -1 \;/ \cdot (3+x) \\ x-3 &\leq -(3+x) \;/ +3, \;/ :2 \\ x &\leq 0 \end{aligned}$$

  Z čísel $x < -3$ jsou řešením nerovnice ta čísla, pro která platí $x \leq 0$, tedy $K_1 = (-\infty;-3)$.

- Pro $x > -3$ násobení kladným výrazem $(3+x)$ se znaménko nerovnosti nemění:

$$\begin{aligned} \frac{x-3}{3+x} &\geq -1 \;/ \cdot (3+x) \\ x-3 &\geq -(3+x) \;/ +3, \;/ :2 \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

  Z čísel $x > -3$ řeší danou nerovnici všechna $x \geq 0$, takže $K_2 = \langle 0; \infty)$.

Celkem dostáváme $K = K_1 \cup K_2 = (-\infty; -3) \cup \langle 0; \infty)$. Porovnejte si sami náročnost obou použitých metod. ☺

Příklad 3.14: Řešme v reálném oboru nerovnici $\dfrac{x}{x^2-3x-4} < 0$.

Nerovnice má smysl pro $x^2 - 3x - 4 \neq 0$. Řešením kvadratické rovnice $x^2 - 3x - 4 = 0$ snadno zjistíme, že tato podmínka je ekvivalentní podmínkám $x \neq 4$ a $x \neq -1$. Kvadratický trojčlen ve jmenovateli lze dále rozložit na součin kořenových činitelů:

$$x^2 - 3x + 4 = (x-4)(x+1)\,.$$

Danou nerovnici lze tedy zapsat ve tvaru

$$\frac{x}{(x-4)(x+1)} < 0\,.$$

Nulové body čitatele a jmenovatele jsou čísla 0, 4, -1. Ta rozdělí reálnou osu na čtyři intervaly, na nichž budeme vyšetřovat znaménko jednotlivých činitelů:

	x	$x+1$	$x-4$	$\dfrac{x}{(x-4)(x+1)}$
$x \in (-\infty; -1)$	$-$	$-$	$-$	$-$
$x \in (-1; 0)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$x \in (0; 4)$	$+$	$+$	$-$	$-$
$x \in (4; \infty)$	$+$	$+$	$+$	$+$

V číslech 0, 4, -1 je výraz buď roven 0, nebo nemá smysl. Z tabulky je zřejmé, že studovaný výraz je záporný pro $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 4)$, tj. $K = (-\infty; -1) \cup (0; 4)$. ☺

Cvičení

Cvičení 3.6: Najděte všechna reálná řešení nerovnic:

a) $x(x-1) \geq 0$,

b) $x(x-1)(x-2) \geq 0$,

c) $x(x-1)(x-2)(x+1) < 0$,

d) $\dfrac{x+3}{x-2} \geq 0$,

e) $\dfrac{x}{x^2-1} < 0$,

f) $\dfrac{x-1}{x+2} \geq 1$,

g) $\dfrac{3x+3}{x-2} \leq -3$,

h) $(x^2-8)(1+x^2) < 0$,

i) $(x^2-3x+2)(1-x^2) \geq 0$,

j) $\dfrac{x(x+5)}{x^2-3} \geq 0$.

Cvičení 3.7: Najděte všechna reálná řešení nerovnic:

a) $x^3 \ln x > 0$, **b)** $(x+1)|x| \leq 0$, **c)** $(x+1)\sqrt[3]{x-1} > 0$,

d) $(x^2+x)\ln x \leq 0$, **e)** $(x+2)\log(3-x) > 0$, **f)** $\dfrac{\sqrt[5]{x+2}}{x+4} \leq 0$.

Cvičení 3.8: Najděte všechna reálná řešení soustav nerovnic:

a) $-1 \leq \frac{1}{x} \leq 1$, **b)** $0 < \dfrac{1}{x-1} \leq 1$, **c)** $0 < \dfrac{x-1}{x-2} \leq 2$,

d) $1 < \dfrac{2x}{x-1} < 3$, **e)** $-6 \leq -\frac{3}{x} \leq 3$, **f)** $1 < \dfrac{1-x}{x} < 2$.

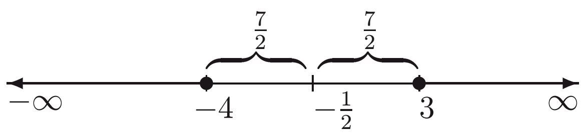
3.4 Kvadratické nerovnice a jejich soustavy

Příklad 3.15: Řešme v reálném oboru nerovnici $-x^2 - x + 12 \leq 0$.

Danou nerovnici vyřešíme čtyřmi různými způsoby:
a) **doplněním na čtverec** (převedením na úplnou druhou mocninu, viz první kapitola):

$$\begin{aligned}
-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} + 12 &\leq 0\\
-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 &\leq -\frac{49}{4} \quad / : (-1)\\
\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 &\geq \frac{49}{4} \quad /\sqrt{\ }\\
\left|x+\frac{1}{2}\right| &\geq \frac{7}{2}
\end{aligned}$$

Řešením získané nerovnice s absolutní hodnotou jsou všechna čísla x, jejichž obraz na reálné ose je od obrazu čísla $-\frac{1}{2}$ vzdálen alespoň o $\frac{7}{2}$, tedy $K = (-\infty; -4\rangle \cup \langle 3; \infty)$, viz Obr. 3.7.



Obrázek 3.7: Ilustrace k příkladu 3.15.

b) **převedením na nerovnici v součinovém tvaru a následnou diskusí možností:** kvadratická rovnice $-x^2 - x + 12 = 0$ má dva reálné kořeny $x_1 = -4$ a $x_2 = 3$, můžeme ji proto psát ve tvaru součinu kořenových činitelů $-(x+4)(x-3) = 0$; danou nerovnici lze přepsat do podoby

$$\begin{aligned}
-(x+4)(x-3) &\leq 0 \quad / : (-1)\\
(x+4)(x-3) &\geq 0.
\end{aligned}$$

Součin dvou výrazů je nezáporný, jsou-li oba výrazy téhož znaménka. Dostáváme tak soustavu podmínek:

$$[x+4 \geq 0 \wedge x-3 \geq 0] \quad \vee \quad [x+4 \leq 0 \wedge x-3 \leq 0]$$

První dvě podmínky lze přepsat do podoby $x \geq -4$ a současně $x \geq 3$, což platí pro $x \in I_1 = \langle 3; \infty)$. Podobně zbylé dvě podmínky $x \leq -4$ a zároveň $x \leq 3$ platí pro $x \in I_2 = (-\infty; -4\rangle$. Množinu všech řešení dostaneme jako sjednocení intervalů I_1 a I_2. Celkem platí: $K = (-\infty; -4\rangle \cup \langle 3; \infty)$.

c) **převedením na nerovnici v součinovém tvaru řešenou metodou nulových bodů:**

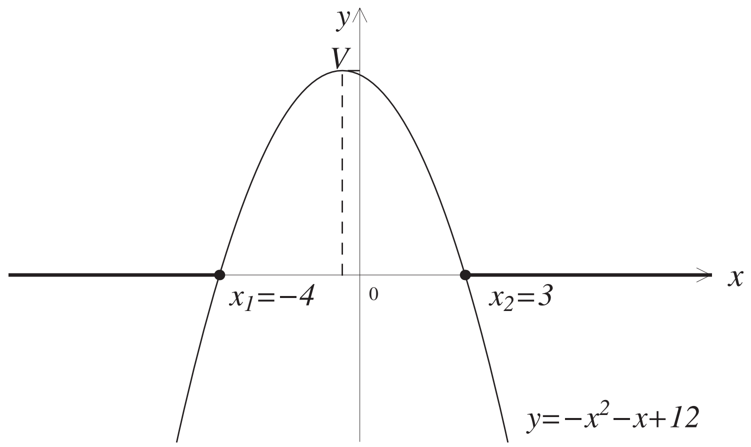
podle předchozích úvah lze psát danou nerovnici v součinovém tvaru $(x+4)(x-3) \geq 0$. Nulovými body výrazů v závorkách jsou $x_1 = -4$ a $x_2 = 3$. Na dílčích intervalech, na které tyto nulové body rozdělí reálnou osu, určíme znaménka výrazů $(x+4)$ a $(x-3)$ a znaménko jejich součinu:

	$(-\infty; -4)$	-4	$(-4; 3)$	3	$(3; \infty)$
$x+4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+4)(x-3)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Řešením je sjednocení intervalů, ve kterých je součin nezáporný, včetně bodů, pro které je roven nule: $K = (-\infty; -4\rangle \cup \langle 3; \infty)$.

d) **graficky:**

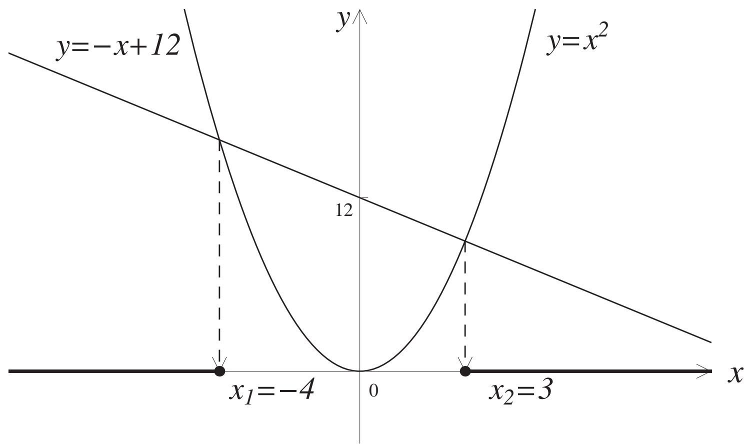
grafem kvadratické funkce $f(x) = -x^2 - x + 12 = -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{49}{4}$ je parabola s vrcholem v bodě $V = \left(-\frac{1}{2}, \frac{49}{4}\right)$ a osou rovnoběžnou s osou y (viz Obr. 3.8). Z předchozího



Obrázek 3.8: Grafické řešení nerovnice $-x^2 - x + 12 \leq 0$.

postupu víme, že protíná osu x v bodech $x_1 = -4$ a $x_2 = 3$. Řešením dané nerovnice jsou ty hodnoty x, které odpovídají záporným nebo nulovým funkčním hodnotám funkce f, tj. $K = (-\infty; -4\rangle \cup \langle 3; \infty)$. Z Obrázku 3.8 je zřejmé, že tato situace nastává pro $x \in (-\infty; -4\rangle \cup \langle 3; \infty)$.

Další možností je řešení dané nerovnice v upravené podobě $-x + 12 \leq x^2$. Hledáme, pro které hodnoty x leží příslušný bod přímky $y = -x + 12$ pod odpovídajícím bodem paraboly $y = x^2$ nebo kdy oba body splývají v jeden, viz Obr. 3.9. ☺



Obrázek 3.9: Grafické řešení nerovnice $-x+12 \leq x^2$.

Cvičení

Cvičení 3.9: Najděte všechna reálná řešení nerovnic:

a) $2x^2 - x - 1 \geq 0$, **b)** $-x^2 + 3x < 0$, **c)** $x^2 - 8x - 9 \leq 0$,

d) $3x^2 - 10x + 3 > 0$, **e)** $(x-3)(x+2) > 6$, **f)** $-x^2 - 7x \geq 12$,

g) $-x^2 - x - 9 < 0$, **h)** $x^2 + 4x + 4 > 0$, **i)** $x^2 + x + 2 < 0$,

j) $x^2 + 2x + 4 \geq 0$, **k)** $-x^2 - 2x > 1$, **l)** $-x^2 - 2x \geq 1$.

Cvičení 3.10: Najděte všechna reálná řešení soustav nerovnic:

a) $0 \leq 1 - x^2 \leq \frac{1}{2}$, **b)** $-1 \leq x(x-2) \leq 1$, **c)** $0 < x^2 - 2x - 15 < 9$,

d) $\begin{aligned} x^2 + 2x &\geq 0 \\ 9 - x^2 &> 0, \end{aligned}$ **e)** $\begin{aligned} x^2 - 16 &\leq 0 \\ 1 - x^2 &\geq 0, \end{aligned}$ **f)** $\begin{aligned} x^2 + 2x - 48 &> 0 \\ x^2 - 81 &\leq 0. \end{aligned}$

3.5 Další typy nerovnic

Řešení dalších typů nerovnic si ukážeme jen na konkrétních příkladech.

3.5.1 Nerovnice s neznámou pod odmocninou

Příklad 3.16: Řešme nerovnici: $\sqrt{x^2 - 6x + 8} \leq 2\sqrt{30}$.

Daná nerovnice má smysl, pokud platí podmínka $x^2 - 6x + 8 \geq 0$. Tato kvadratická nerovnice je splněna pro $x \in (-\infty; 2\rangle \cup \langle 4; \infty)$. Ověřte podrobněji sami! Dále obě strany nerovnice umocníme na druhou (což je v tomto případě ekvivalentní úprava) a řešíme příslušnou kvadratickou nerovnici, kterou po této úpravě získáme:

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 8 &\leq 120 \; / - 120 \\ x^2 - 6x - 112 &\leq 0 \end{aligned}$$

Pro její diskriminant platí $D = 36 - 4 \cdot 1 \cdot (-112) = 484$, $\sqrt{484} = 22$; rovnice má kořeny

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm 22}{2} = \begin{array}{l} \nearrow \quad x_1 = 14 \\ \searrow \quad x_2 = -8. \end{array}$$

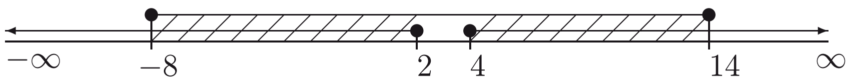
Nerovnici, kterou řešíme, proto můžeme psát v součinovém tvaru

$$(x - 14)(x + 8) \le 0,$$

odkud plynou možnosti

$$[x - 14 \le 0 \ \wedge \ x + 8 \ge 0] \qquad \vee \qquad [x - 14 \ge 0 \ \wedge \ x + 8 \le 0]\,.$$

První dvě podmínky $x \le 14$ a současně $x \ge -8$ platí pro $x \in \langle -8; 14 \rangle$. Zbylým dvěma podmínkám $x \ge 14$ a současně $x \le -8$ nevyhovují žádná reálná čísla. Nyní ovšem musíme



Obrázek 3.10: Ilustrace k Příkladu 3.16.

přihlédnout k tomu, že nerovnice má smysl jen pro $x \in (-\infty; 2\rangle \cup \langle 4; \infty)$, takže celkově platí (viz Obr. 3.10)

$$K = \langle -8; 14 \rangle \cap [(-\infty; 2\rangle \cup \langle 4; \infty)] = \langle -8; 2 \rangle \cup \langle 4; 14 \rangle.$$

Zkoušku uskutečnit nemůžeme pro nekonečně mnoho kořenů, ale využijeme toho, že všechny úpravy nerovnice byly ekvivalentní a nalezená x vyhovují podmínkám, za kterých má zadaná nerovnice smysl. ☺

3.5.2 Jednoduché exponenciální nerovnice

Při řešení exponenciálních nerovnic využíváme těchto vlastností exponenciální funkce:

$$a^x > a^y,\ a > 1 \quad \Rightarrow \quad x > y \tag{3.1}$$

$$a^x > a^y,\ 0 < a < 1 \quad \Rightarrow \quad x < y \tag{3.2}$$

Příklad 3.17: Řešme v reálném oboru nerovnici $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x \ge \dfrac{3}{5}$.

Využijeme toho, že $\frac{3}{5} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} \frac{3}{5}}$ a podle (3.2) pak dostáváme

$$x \le \log_{\frac{1}{2}} \tfrac{3}{5}, \quad \text{tedy} \quad K = \left(-\infty; \log_{\frac{1}{2}} \tfrac{3}{5}\right\rangle.$$

☺

3.5.3 Jednoduché logaritmické nerovnice

Při řešení logaritmických nerovnic využíváme těchto vlastností logaritmické funkce:

$$\log_a x > \log_a y,\ a > 1 \quad \Rightarrow \quad x > y \tag{3.3}$$
$$\log_a x > \log_a y,\ 0 < a < 1 \quad \Rightarrow \quad x < y \tag{3.4}$$

Příklad 3.18: Řešme v reálném oboru nerovnici $\log(x-1) \leq 0$.

Daná nerovnice má smysl pro $x - 1 > 0$, tedy $x > 1$. Za tohoto předpokladu nerovnici vyřešíme:

$$\log(x-1) \leq 0 \Leftrightarrow \log(x-1) \leq \log 1.$$

Odtud podle (3.3) plyne nerovnice $x - 1 \leq 1$, a tedy $x \leq 2$. Obě podmínky $x > 1$ a $x \leq 2$ splňují všechna $x \in (1; 2\rangle$. ☺

Příklad 3.19: Řešme v reálném oboru nerovnici $\log_{\frac{1}{2}}(x+2) \geq 0$.

Nerovnice má smysl za podmínky $x + 2 > 0$, tj. $x > -2$. Pro $x \in (-2; \infty)$ platí:

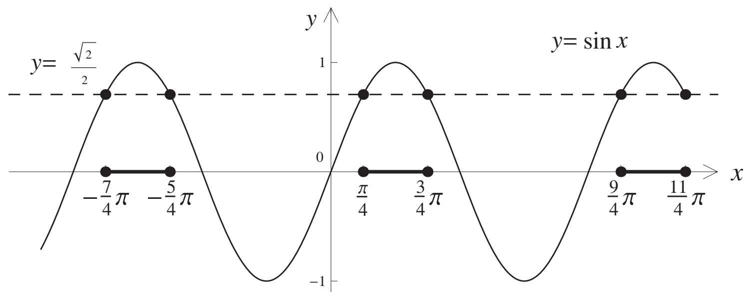
$$\log_{\frac{1}{2}}(x+2) \geq 0 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x+2) \geq \log_{\frac{1}{2}} 1.$$

Podle (3.4) nám poslední nerovnice dává podmínku $x + 2 \leq 1$, a tedy $x \leq -1$. Množina všech řešení $K = (-\infty; -1\rangle \cap (-2; \infty) = (-2; -1\rangle$. ☺

3.5.4 Jednoduché goniometrické nerovnice

Příklad 3.20: Řešme v reálném oboru nerovnici $\sin x \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Tuto nerovnici vyřešíme graficky. Víme, že příslušná rovnice $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ má v intervalu



Obrázek 3.11: Obrázek k Příkladu 3.20.

$\langle 0; 2\pi\rangle$ dvě řešení $x_1 = \dfrac{\pi}{4}$ a $x_2 = \dfrac{3\pi}{4}$. Z Obrázku 3.11 je dále zřejmé, že všechna řešení dané nerovnice jsou prvky množiny

$$K = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\langle \frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \right\rangle.$$

☺

Cvičení

Cvičení 3.11: Najděte všechna reálná řešení nerovnic:

a) $\sqrt{4-x} \le 5$, **b)** $0 < \sqrt{x^2-9}$, **c)** $\sqrt{x-7} \ge 3$,

d) $\sqrt{x+1} < 2$, **e)** $\sqrt{x-3} < \sqrt{4-x}$, **f)** $\sqrt{x^2+1} \ge \sqrt{x^2-2x+1}$,

g) $\sqrt{x^2-4} \ge x-2$, **h)** $\sqrt{x^2-4} < x-2$.

Cvičení 3.12: Najděte všechna reálná řešení nerovnic:

a) $2^{x-4} \le \dfrac{1}{2}$, **b)** $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+1} \ge 3^2$, **c)** $\left(\dfrac{1}{7}\right)^{2x-5} < \left(\dfrac{1}{7}\right)^{x-3}$,

d) $\mathrm{e}^{-x+2} > 0$, **e)** $-\mathrm{e}^{x+3} > 0$, **f)** $(\mathrm{e}-1)^{x-2} < 0$,

g) $3^x < 4$, **h)** $\left(\frac{1}{3}\right)^{-x} < \frac{1}{2}$, **i)** $7^{x-1} \ge 5$.

Cvičení 3.13: Najděte všechna reálná řešení nerovnic:

a) $\log(x-2) > 3$, **b)** $\ln(2x+1) \le 1$, **c)** $\log_{\frac{1}{2}}(x+7) > \log_{\frac{1}{2}}(2x-3)$,

d) $\log_3(1-x) > 0$, **e)** $\dfrac{1}{\ln(x+1)} \ge 1$, **f)** $\log(x-2) - \log(x-1) \ge 1$.

Cvičení 3.14: Najděte všechna reálná řešení nerovnic:

a) $\cos x \le \frac{1}{2}$, **b)** $2\cos x \ge 2$, **c)** $\cos 2x \le 1$,

d) $\operatorname{tg} x < 1$, **e)** $|\operatorname{tg} x| \le 1$, **f)** $\dfrac{\operatorname{cotg} x}{|\operatorname{cotg} x|} \ge 0$,

g) $1 + \operatorname{tg} x \ge 0$, **h)** $\sin 2x < 0$, **i)** $\sin x \le -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Kapitola 4

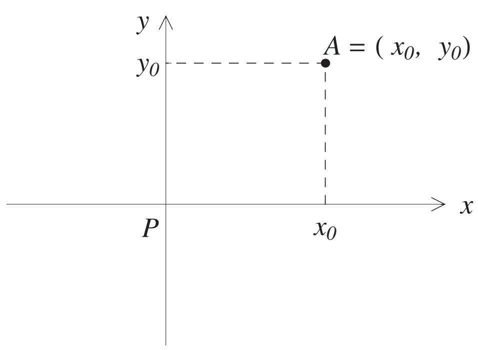
Analytická geometrie v rovině

Analytická geometrie nám umožňuje algebraickými prostředky (např. řešením rovnic či nerovnic) vyšetřovat a nalézat geometrické objekty požadovaných vlastností (např. přímky, kružnice, jejich průsečíky apod.) Abychom to mohli činit, je nejprve třeba bodům v rovině přiřadit jejich souřadnice.

4.1 Kartézské souřadnice v rovině

Kartézské souřadnice nebo krátce jen souřadnice (jinými souřadnicemi se v těchto skriptech nebudeme zabývat), zavádíme v rovině tak, že zvolíme dvě na sebe kolmé přímky. Obvykle volíme jednu vodorovnou a nazýváme ji osou x a druhou k ní kolmou nazýváme osou y. Průsečík těchto přímek nazýváme počátkem a značíme P. Dále je třeba zvolit měřítko, tj. stanovit, co je úsečka délky 1. Pak lze osy x a y považovat za číselné osy, kdy počátek představuje na obou osách číslo 0 a kladná čísla jsou na ose x vpravo od počátku a kladná čísla na ose y jsou nad počátkem. Někdy je pro lepší znázornění vhodné volit na ose x jiné měřítko než na ose y.

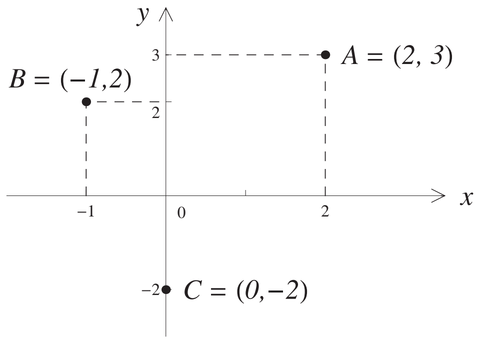
Každému bodu A roviny pak přiřadíme uspořádanou dvojici čísel, jeho souřadnice, následovně: Vezmeme kolmý průmět bodu A na osu x a jeho číselnou hodnotu, např. x_0, nazveme x-ovou souřadnicí bodu A. Podobně číselnou hodnotu kolmého průmětu bodu A na osu y, např. y_0, nazveme y-ovou souřadnicí bodu A. Píšeme pak $A = (x_0, y_0)$ a dvojici (x_0, y_0) nazýváme souřadnicemi bodu A, viz Obr. 4.1. Zřejmě počátek P má souřadnice



Obrázek 4.1: Kartézské souřadnice bodu.

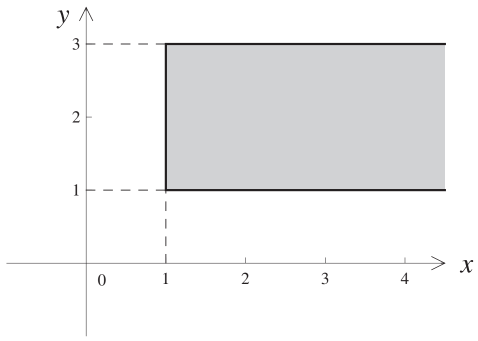
$(0, 0)$, body osy x souřadnice tvaru $(x, 0)$ a body osy y souřadnice tvaru $(0, y)$. Naopak každé uspořádané dvojici čísel (x_0, y_0) odpovídá právě jeden bod A roviny (ve které jsou zavedeny souřadnice) takový, že $A = (x_0, y_0)$.

Příklad 4.1: Na Obr. 4.2 jsou nakresleny body o souřadnicích $A = (2, 3)$, $B = (-1, 2)$ a $C = (0, -2)$. ☺



Obrázek 4.2: Kartézské souřadnice bodů A, B, C z Příkladu 4.1.

Příklad 4.2: Na Obr. 4.3 jsou vyznačeny body, jejichž souřadnice x, y splňují podmínky $x \geq 1$ a $1 \leq y \leq 3$. ☺



Obrázek 4.3: Body z Příkladu 4.2.

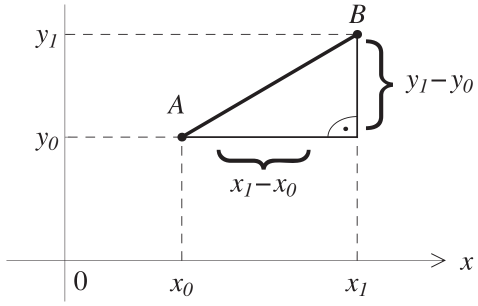
V další části této kapitoly budeme předpokládat, že v rovině máme zavedeny kartézské souřadnice.

4.1.1 Vzdálenost bodů v rovině

Jsou-li dány dva body $A = (x_0, y_0)$ a $B = (x_1, y_1)$, pak jejich vzdálenost $d(A, B)$, tj. délku úsečky AB, můžeme vypočítat ze vztahu

$$d(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}\ , \tag{4.1}$$

jak plyne okamžitě z Pythagorovy věty, viz Obr. 4.4.



Obrázek 4.4: Vzdálenost dvou bodů.

Příklad 4.3: Vypočtěme vzdálenost bodů $A = (2, -1)$ a $B = (-1, 3)$. S využitím vztahu (4.1) dostáváme

$$d(A, B) = \sqrt{(-1-2)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \ .$$

☺

Cvičení

Cvičení 4.1: Určete souřadnice bodu B, který je souměrně sdružený s bodem $A = (-3, 2)$ podle:

a) osy x, **b)** osy y, **c)** podle počátku.

Cvičení 4.2: Určete vzdálenost bodů A a B, kde:

a) $A = (-1, -2)\ ,\ B = (-3, 0)$, **b)** $A = (2, -3)\ ,\ B = (2, 1)$,

c) $A = (0, 3)\ ,\ B = (-4, 0)$, **d)** $A = (2, 2)\ ,\ B = (-t, t)$.

Cvičení 4.3: Rozhodněte, zda trojúhelník ABC je pravoúhlý, je-li:

a) $A = (3, 4)\ ,\ B = (-1, 1)\ ,\ C = (0, 5)$, **b)** $A = (3, 5)\ ,\ B = (1, 1)\ ,\ C = (-3, 3)$.

4.2 Rovnice přímky

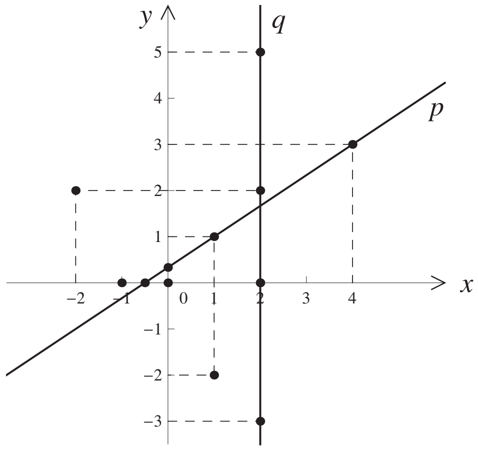
4.2.1 Obecná rovnice přímky

Obecná rovnice přímky v rovině má tvar

$$ax + by + c = 0 \ , \tag{4.2}$$

kde a, b, c jsou nějaká reálná čísla taková, že alespoň jedno z čísel a a b není rovno 0. (To lze též vyjádřit podmínkou $a^2 + b^2 > 0$.)

Příklad 4.4: Rovnice $2x - 3y + 1 = 0$ je rovnicí nějaké přímky p a rovnice $3x - 6 = 0$ je rovnicí nějaké přímky q. Na přímce p leží právě ty body, pro jejichž souřadnice je splněna rovnost $2x - 3y + 1 = 0$. Tedy např. body $(1, 1), (-\frac{1}{2}, 0), (4, 3)$ a $(0, \frac{1}{3})$ leží na přímce p, ale body $(2, 2), (-1, 0), (1, -2)$ na ní neleží. Podobně body $(2, 0), (2, -3)$ a $(2, 5)$ leží na přímce q, ale body $(0, 0), (-2, 2)$ na ní neleží, viz Obr. 4.5. ☺



Obrázek 4.5: Přímky z Příkladu 4.4.

Obecně lze říci, že má-li přímka p rovnici $ax+by+c=0$, pak na ní leží právě body $X=(x,y)$, jejichž souřadnice jsou řešením dané rovnice. Samozřejmě, vynásobíme-li rovnici (4.2) nějakým nenulovým číslem (ekvivalentní úprava), pak dostaneme rovnici téže přímky, protože řešením ekvivalentní rovnice jsou souřadnice stále stejných bodů v rovině. Tedy např. $6x-9y+3=0$ a $-x+\frac{3}{2}y-\frac{1}{2}=0$ jsou rovnice přímky p z Příkladu 4.4. Přímka q z předchozího příkladu je popsána rovnicí $3x-6=0$ nebo ekvivalentně rovnicí $x=2$, leží na ní tedy právě ty body, jejichž x-ová souřadnice je rovna 2 a y-ová souřadnice je libovolné reálné číslo. Je to tedy přímka rovnoběžná s osou y. Všimněme si, že pro tuto přímku je koeficient b u proměnné y roven 0. To platí obecně:

1. Přímka s rovnicí $ax+c=0$, (tj. $b=0$) je rovnoběžná s osou y.
2. Přímka s rovnicí $by+c=0$, (tj. $a=0$) je rovnoběžná s osou x.
3. Přímka s rovnicí $ax+by+c=0$, kde $a\neq 0$ a $b\neq 0$, není rovnoběžná ani s osou x ani s osou y.

Zřejmě každé dva různé body v rovině určují právě jednu přímku, která jimi prochází. Zkusme najít rovnici této přímky. Postup si ukážeme na následujících příkladech.

Příklad 4.5: Určeme rovnici přímky AB procházející body $A=(3,-1)$ a $B=(2,4)$. Pokud bychom hledali rovnici dané přímky v obecném tvaru $ax+by+c=0$, pak jak víme, nejsou koeficienty a,b,c určeny jednoznačně, což může činit potíže. Proto je výhodné volit koeficient u proměnné y rovný jedné a psát rovnici (4.2) ve tvaru $y=kx+q$, který nazýváme směrnicový. (Více se jím budeme zabývat v následujícím odstavci.) To lze udělat pouze v případě, že v rovnici (4.2) je koeficient b různý od 0, tedy v případě, že přímka procházející body A a B není rovnoběžná s osou y. Na první pohled ale vidíme, že přímka AB s osou y rovnoběžná není, protože x-ové souřadnice bodů A a B jsou různé. Můžeme tedy její rovnici hledat ve směrnicovém tvaru $y=kx+q$. Dosadíme-li do této rovnice souřadnice bodů A a B, dostaneme dvě rovnice pro neznámé k a q, totiž rovnice

$$-1 = 3k + q \qquad \text{a} \qquad 4 = 2k + q \ .$$

Odtud dostáváme $k = -5$ a $q = 14$ a rovnice hledané přímky je $y = -5x+14$. O správnosti výsledku se můžeme snadno přesvědčit dosazením souřadnic bodů A a B do nalezené rovnice. Musíme dostat platné rovnosti. ☺

Příklad 4.6: Určeme rovnici přímky AB procházející body $A = (-3, 1)$ a $B = (-3, 7)$. Zřejmě tato přímka je rovnoběžná s osou y, tedy její rovnice bude $x = -3$. ☺

Existuje i obecný vzorec pro rovnici přímky procházející různými body $A = (x_1, y_1)$ a $B = (x_2, y_2)$. Rovnice takové přímky má tvar

$$(x - x_1)(y_2 - y_1) = (y - y_1)(x_2 - x_1) \ .$$

Snadno se ukáže, že souřadnice bodů A a B této rovnici vyhovují a tato rovnice je rovnicí přímky. Lze ji totiž upravit na tvar $ax + by + c = 0$. Přesto bude pro nás výhodnější hledat rovnici přímky ve směrnicovém tvaru. Jednak si nemusíme pamatovat další vzorec, jednak směrnicový tvar má i jasný geometrický význam. To si ukážeme v následujícím odstavci.

4.2.2 Směrnicový tvar rovnice přímky

Jak jsme si již řekli, má-li přímka p rovnici

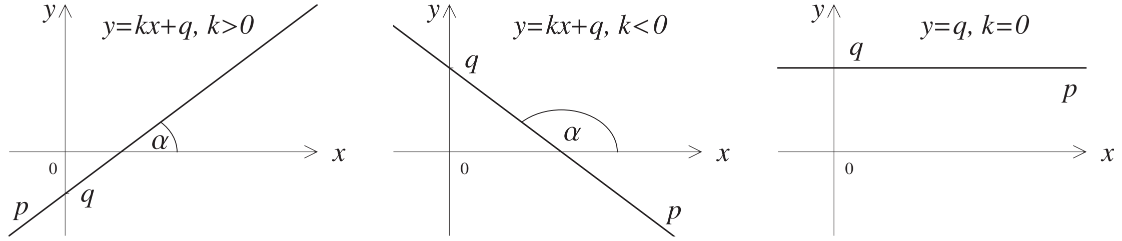
$$y = kx + q \ , \tag{4.3}$$

nazýváme tuto rovnici směrnicovým tvarem rovnice přímky p a číslo k směrnicí přímky p. Zdůrazněme, že v tomto tvaru nelze zapsat rovnice přímek rovnoběžných s osou y.

Ukažme si geometrický význam čísel k a q.

Pro směrnici k přímky p platí $k = \operatorname{tg} \alpha$, kde α je úhel, který svírá přímka p s kladným směrem osy x.
Číslo q je pak y-ová souřadnice průsečíku přímky p s osou y, viz Obr. 4.6.

To nahlédneme následovně: Uvažujme nejprve $k > 0$. Zvolme dva různé body $A = (x_0, y_0)$



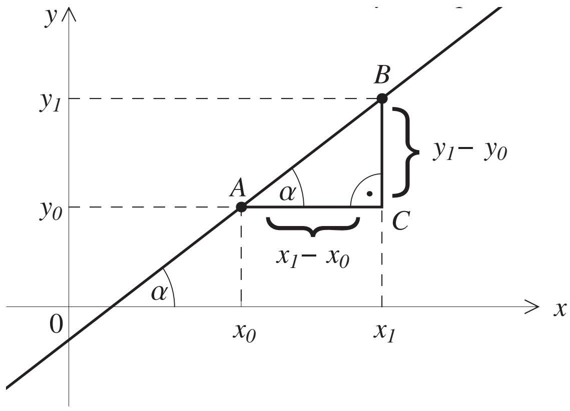
Obrázek 4.6: Směrnice přímky.

a $B = (x_1, y_1)$, které leží na přímce p s rovnicí $y = kx+q$.(Přímka p není rovnoběžná s osou

y, tedy $x_0 \neq x_1$.) Pak $y_0 = kx_0 + q$ a také $y_1 = kx_1 + q$. Odečtením těchto dvou rovnic dostaneme $y_1 - y_0 = k(x_1 - x_0)$, a tedy $k = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$. Jelikož v pravoúhlém trojúhelníku ABC je tangens úhlu α roven poměru velikosti protilehlé odvěsny ku velikosti přilehlé odvěsny, dostáváme

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = k \ . \tag{4.4}$$

Celá situace je nakreslena na Obr. 4.7. Pro $k < 0$ lze postupovat obdobně.
Zřejmě dosazením $x = 0$ do rovnice (4.3) dostaneme $y = q$, tedy bod $(0, q)$ je bodem přímky p. Je to tedy její průsečík s osou y.



Obrázek 4.7: Odvození vztahu (4.4).

V předchozím jsme vlastně ukázali následující:

Prochází-li přímka body $A = (x_0, y_0)$ a $B = (x_1, y_1)$, $x_0 \neq x_1$, je její směrnice k dána vztahem

$$k = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \ . \tag{4.5}$$

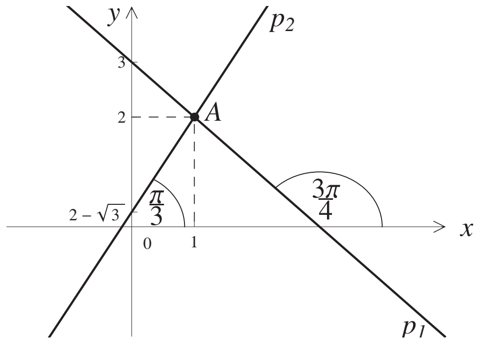
Znaménko směrnice přímky určuje, zda je funkce $y = kx + q$ rostoucí či klesající, tj. zda se zvětšujícím se x se hodnoty y zvětšují či zmenšují. Platí:

- Je-li $k > 0$, je $0 < \alpha < \pi/2$ a funkce $y = kx + q$ je rostoucí.
- Je-li $k < 0$, je $\pi/2 < \alpha < \pi$ a funkce $y = kx + q$ je klesající.
- Je-li $k = 0$, je přímka p rovnoběžná s osou x a $y = q$ je konstantní funkce.

Uvažované možnosti jsou znázorněny na Obr. 4.6.

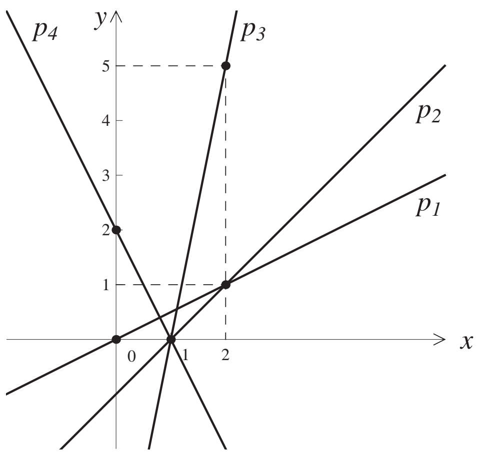
Příklad 4.7: Napišme rovnice přímek p_1 a p_2, které obě procházejí bodem $A = (1, 2)$, a přímka p_1 svírá s kladným směrem osy x úhel $\frac{3}{4}\pi$ (tj. $135°$) a přímka p_2 úhel $\frac{1}{3}\pi$ (tj. $60°$), viz Obr. 4.8.
Protože $\operatorname{tg} 135° = -1$, má přímka p_1 směrnici $k = -1$ a její rovnice má tvar $y = -x + q$.

Dosazením souřadnic bodu A do této rovnice dostáváme $q = 3$. Tedy $y = -x + 3$ je rovnicí přímky p_1. Podobně $\operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$, a tedy p_2 má rovnici $y = \sqrt{3}\,x + q$. Po dosazení souřadnic bodu A do této rovnice dostaneme $q = 2 - \sqrt{3}$ a hledaná rovnice přímky p_2 je $y = \sqrt{3}\,x + 2 - \sqrt{3}$. ☺



Obrázek 4.8: Přímky k Příkladu 4.7.

Příklad 4.8: Určeme směrnice přímek na Obr. 4.9.
Zřejmě směrnice přímek p_1, p_2 a p_3 jsou kladné a směrnice přímky p_4 záporná. K určení směrnic použijeme vztah (4.5). Protože přímka p_1 prochází počátkem a bodem $(2, 1)$, je tangens úhlu, který svírá s kladným směrem osy x, tj. její směrnice, $\frac{1}{2}$. Podobně přímka p_2 prochází body $(1, 0)$ a $(2, 1)$, její směrnice je tedy 1. Dále p_3 prochází body $(1, 0)$ a $(2, 5)$, její směrnice je tedy 5. Konečně p_4 prochází body $(0, 2)$ a $(1, 0)$, její směrnice je -2. (Všimněme si, že čím je absolutní hodnota směrnice větší, tím je přímka „strmější“.) ☺



Obrázek 4.9: Přímky k Příkladu 4.8.

Ze směrnic dvou přímek můžeme také snadno určit jejich úhel.

Má-li přímka p_1 směrnici k_1 a přímka p_2 směrnici k_2, pak platí:

- Přímky p_1 a p_2 jsou kolmé právě tehdy, když $k_1k_2 = -1$.
- Nejsou-li přímky p_1 a p_2 kolmé, pak svírají úhel α, pro který platí $\operatorname{tg}\alpha = \left|\dfrac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}\right|$.

Tento vztah plyne snadno z geometrického významu směrnice a ze vzorce pro tangens rozdílu dvou úhlů, položíme-li $k_1 = \operatorname{tg}\beta$ a $k_2 = \operatorname{tg}\gamma$. Je totiž

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\beta - \gamma) = \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\gamma}{1 + \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma}\ .$$

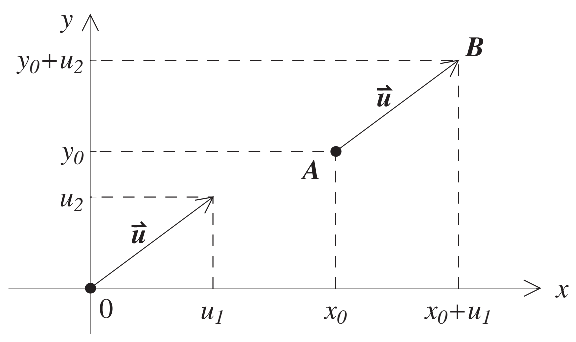
Příklad 4.9: Napišme rovnici přímky p_1, která prochází bodem $A = (-3, 3)$ a je kolmá k přímce p_2 procházející body $B = (1, 1)$ a $C = (4, 2)$.
Ze vztahu (4.5) dostáváme, že pro směrnici k_2 přímky p_2 platí $k_2 = \frac{2-1}{4-1} = \frac{1}{3}$. Pro směrnici k_1 přímky p_1 platí $k_1 = -3$, aby bylo splněno $k_1k_2 = -1$. Rovnice p_1 má tvar $y = -3x + q$ a dosazením souřadnic bodu A dostaneme $q = -6$. Tedy $y = -3x - 6$, nebo po úpravě $3x + y + 6 = 0$, je hledaná rovnice přímky p_1.
Dále spočítejme obsah S trojúhelníku ABC. Zřejmě pata Q výšky spuštěné z vrcholu A na stranu BC je průsečíkem přímek p_1a p_2. Rovnice přímky p_2 je $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$. Souřadnice bodu Q jsou řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \\ y &= -3x - 6\ , \end{aligned}$$

a tudíž je $Q = (-2, 0)$. Odtud ze vztahu (4.1) pro vzdálenost dvou bodů v rovině okamžitě dostáváme, že délka strany BC je $\sqrt{10}$ a rovněž délka výšky v_a v $\triangle ABC$, tj. délka úsečky AQ, je $\sqrt{10}$. Odtud ze známého vzorce pro obsah trojúhelníku dostáváme, že $S = 5$. Celou situaci si nakreslete! ☺

4.2.3 Parametrické rovnice přímky

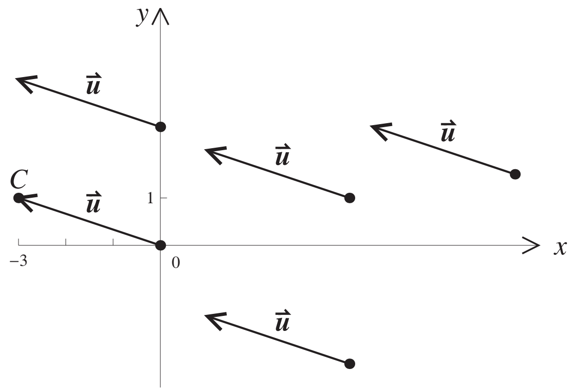
Přímka je určena dvěma svými body, nebo jedním svým bodem a vektorem, který udává její směr. Vektorem $\vec{u}$ (v rovině) rozumíme uspořádanou dvojici reálných čísel, tj. $\vec{u} = (u_1, u_2)$, a znázorňujeme jej jako orientovanou úsečku, která vede z počátku $P = (0, 0)$ do bodu o souřadnicích (u_1, u_2), nebo z nějakého bodu $A = (x_0, y_0)$ do bodu $B = (x_0 + u_1, y_0 + u_2)$, viz Obr. 4.10.



Obrázek 4.10: Znázornění vektoru.

Zvolení bodu (x_0, y_0), ze kterého vektor $\vec{u}$ nakreslíme, nazýváme umístěním vektoru $\vec{u}$. Bod $A = (x_0, y_0)$ pak nazýváme počátečním bodem vektoru $\vec{u}$ a bod $B = (x_0 + u_1, y_0 + u_2)$ koncovým bodem vektoru $\vec{u}$. Píšeme též $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

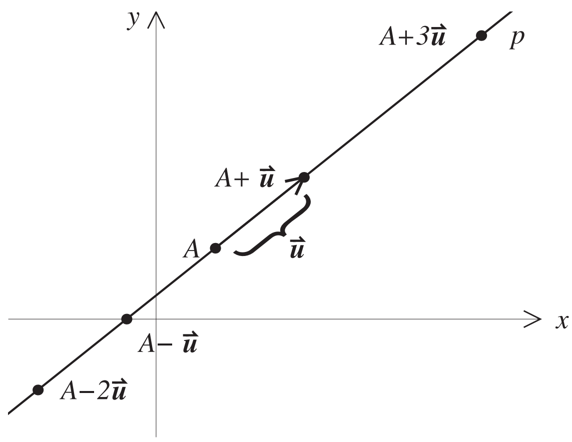
Na Obrázku 4.11 jsou znázorněna různá umístění vektoru $\vec{u} = (-3, 1)$.



Obrázek 4.11: Různá umístění vektoru.

Všimněme si, že dvojici reálných čísel, např. $(-3, 1)$, můžeme geometricky interpretovat dvěma způsoby. Jednak jako bod C o souřadnicích $(-3, 1)$, jednak jako vektor $\vec{u} = (-3, 1)$, viz Obr. 4.11. Při umístění $\vec{u}$ do počátku koncový bod vektoru $\vec{u}$ a bod C splývají.

Body přímky p, která prochází bodem $A = (a_1, a_2)$ a má směr (přesněji má směrový vektor) $\vec{u} = (u_1, u_2)$, dostáváme tak, že do bodu A umísťujeme různé násobky vektoru $\vec{u}$. Koncové body takto umístěných vektorů jsou pak body přímky p, viz Obr. 4.12. (Pro $t \in \mathbb{R}$



Obrázek 4.12: Přímka určená bodem a vektorem.

je $t\vec{u} = (tu_1, tu_2)$. Geometricky to znamená, že vektor $\vec{u}$ se $|t|$-krát prodloužil a pro $t < 0$ ještě změnil orientaci.)

Formálně body $X = (x, y)$ přímky p dostáváme jako

$$X = A + t\vec{u},\ t \in \mathbb{R},$$

což rozepsáno do souřadnic dává

$$\begin{array}{rcl} x &=& a_1 + tu_1 \\ y &=& a_2 + tu_2 \end{array} \;,\quad t \in \mathbb{R}\;. \tag{4.6}$$

Rovnice (4.6) nazýváme parametrickými rovnicemi přímky p procházející bodem A se směrovým vektorem $\vec{u}$. Pro různé volby parametru $t \in \mathbb{R}$ pak dostáváme souřadnice různých bodů přímky p.

Příklad 4.10: Napišme parametrické rovnice a směrnicový tvar rovnice přímky p procházející bodem $A = (4, -1)$ se směrovým vektorem $\vec{u} = (-2, 1)$. Parametrické rovnice jsou

$$\begin{array}{rcl} x &=& 4 - 2t \\ y &=& -1 + t \end{array} \;,\quad t \in \mathbb{R}\;.$$

Pro hodnotu parametru $t = 0$ dostaneme bod A, pro $t = 1$ bod $(2, 0)$, pro $t = 2$ bod $(0, 1)$, pro $t = -2$ bod $(8, -3)$ atd. Z parametrických rovnic přímky p můžeme vyloučit parametr t a získat tak obecnou rovnici přímky p. V našem příkladě z rovnice $x = 4 - 2t$ dostáváme $t = 2 - \frac{x}{2}$ a dosazením za t do rovnice $y = -1 + t$ dostaneme $y = -\frac{x}{2} + 1$, což je směrnicový tvar rovnice přímky p. ☺

Samozřejmě směrový vektor $\vec{u} = (u_1, u_2)$ přímky p je určen až na nenulový násobek, tj. je-li $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, pak i vektor $\alpha\vec{u} = (\alpha u_1, \alpha u_2)$ je směrovým vektorem přímky p. Jsou -li zadané dva (různé) body $A = (a_1, a_2)$ a $B = (b_1, b_2)$ přímky p, pak za směrový vektor přímky p můžeme volit vektor $\overrightarrow{AB} = B - A = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$.

Příklad 4.11: Napišme parametrické rovnice přímky p procházející body $A = (-1, 2)$ a $B = (3, -1)$.
Protože směrovým vektorem přímky p je vektor $\overrightarrow{AB} = B - A = (4, -3)$, jsou hledané rovnice např.

$$\begin{array}{rcl} x &=& -1 + 4t \\ y &=& 2 - 3t \end{array} \;,\quad t \in \mathbb{R}\;.$$

☺

Parametrické rovnice přímky p procházející dvěma body A a B lze tedy formálně zapsat jako

$$X = A + t(B - A)\;, t \in \mathbb{R}\;,$$

kde X je libovolný bod přímky p. Omezíme-li hodnoty parametru t, dostáváme pouze body nějaké části přímky p. Např. pro $t \in \langle 0, 1\rangle$ dostáváme (při této parametrizaci) body úsečky AB, pro $t \geq 0$ body polopřímky AB, pro hodnotu $t = \frac{1}{2}$ střed úsečky AB.

Cvičení

Cvičení 4.4: Napište obecnou rovnici přímky p procházející body A a B, kde:

a) $A = (2, -5)\;,\; B = (4, 10)$,

b) $A = (-3, 2)\;,\; B = (0, 0)$,

c) $A = (-4, -2)\;,\; B = (0, 3)$,

d) $A = (-5, 1)\;,\; B = (-5, -5)$,

e) $A = (4, 1)\;,\; B = (-3, 1)$,

f) $A = (3, 3)\;,\; B = (-2, 2)$.

Cvičení 4.5: Ke každé přímce p z předchozího cvičení napište obecnou rovnici přímky q, která je k přímce p kolmá a prochází bodem $C = (4, 1)$.

Cvičení 4.6: Určete průsečík P přímek p_1 a p_2, jsou-li přímky p_1, p_2 zadány rovnicemi:

a) $2x - y = 0\ ,\ 3y - x + 1 = 0$, **b)** $3x - y + 1 = 0\ ,\ 2x + 6y - 1 = 0$,

c) $\sqrt{3}\,x + y + 1 = 0\ ,\ x = 2$, **d)** $3x + 2y - 4 = 0\ ,\ y = -\frac{3}{2}x + 5$.

Cvičení 4.7: Určete úhel α, který svírají přímky p_1 a p_2 z předchozího cvičení.

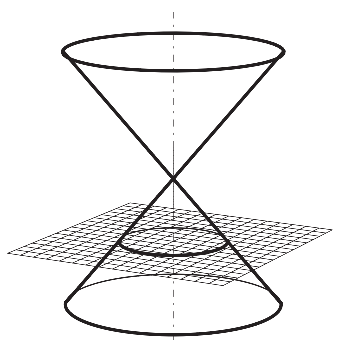
Cvičení 4.8: Napište parametrické rovnice úsečky AB a určete její střed S pro body A a B zadané ve Cvičení 4.4.

4.3 Kuželosečky

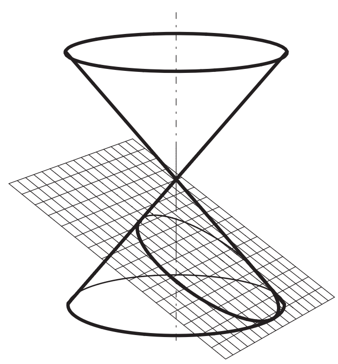
Kuželosečky (kružnice, elipsa, parabola a hyperbola) jsou rovinné křivky. Lze je zavést několika způsoby. Jednou z možností je jako průnik kuželové plochy s rovinou. Odtud také název kuželosečky. Konkrétně: Jsou-li v 3-rozměrném prostoru dány dvě různoběžky p a o, které svírají úhel $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ a protínají se v bodě P, pak rotací přímky p kolem přímky o získáme kuželovou plochu. Její osou bude přímka o a vrcholem bod P. Uvažme dále rovinu τ, která neprochází bodem P. Průnikem roviny τ s kuželovou plochou získáme kuželosečku. Na úhlu $\beta \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$, který svírá rovina τ s přímkou o pak závisí, jakou kuželosečku dostaneme:

- Je-li $\beta = \frac{\pi}{2}$, je průnikem kružnice.
- Je-li $\beta \in (\alpha, \frac{\pi}{2})$, je průnikem elipsa.
- Je-li $\beta = \alpha$, je průnikem parabola.
- Je-li $\beta \in \langle 0, \alpha)$, je průnikem hyperbola.

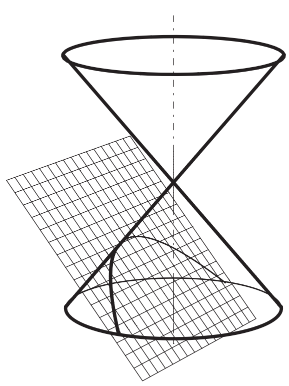
Celá situace je znázorněna na Obrázcích 4.13, 4.14, 4.15 a 4.16.



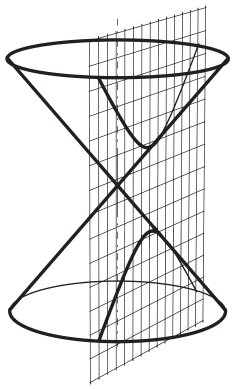
Obrázek 4.13: Kružnice.



Obrázek 4.14: Elipsa.



Obrázek 4.15: Parabola.



Obrázek 4.16: Hyperbola.

Jiný způsob zavedení kuželoseček je následující:

- Kružnice je množina bodů v rovině, které mají od daného bodu S této roviny konstantní vzdálenost $r > 0$. (Bod S se nazývá střed kružnice a číslo r její poloměr.)
- Elipsa je množina bodů v rovině, které mají konstantní součet vzdáleností od dvou různých bodů F_1 a F_2 této roviny, součet vzdáleností je větší než vzdálenost bodů F_1, F_2. (Body F_1 a F_2 se nazývají ohniska elipsy.)
- Je-li v rovině dána přímka d a bod F, který na ní neleží, pak parabola je množina bodů této roviny, které mají od bodu F stejnou vzdálenost jako od přímky d. (Bod F se nazývá ohniskem paraboly a přímka d řídící přímkou paraboly.)
- Hyperbola je množina bodů v rovině, které mají konstantní rozdíl vzdáleností od dvou různých bodů F_1 a F_2 této roviny, rozdíl vzdáleností je menší než vzdálenost bodů F_1, F_2. (Body F_1 a F_2 se nazývají ohniska hyperboly.)

My se v dalším omezíme na popis kuželoseček pomocí rovnic. V kartézské souřadnicové soustavě budeme uvažovat pouze kuželosečky, které mají osu rovnoběžnou s osou x nebo osou y. Takové kuželosečky lze popsat rovnicí

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0 , \tag{4.7}$$

kde A, B, C, D, E jsou reálné konstanty. Naučíme se poznat, zda a jakou kuželosečku rovnice (4.7) představuje, a tuto kuželosečku nakreslit. Uvedeme vždy nejprve rovnici kuželosečky, kdy střed, resp. vrchol je umístěn do počátku. Tu také znázorníme na obrázku. Následně pak uvedeme rovnici, kdy kuželosečka je posunuta tak, že střed, resp. vrchol je posunut do bodu (x_0, y_0). Při určování tohoto posunutí v konkrétních příkladech obvykle využíváme tzv. doplnění na čtverec, se kterým jsme se setkali v první kapitole, viz vztah (1.1).

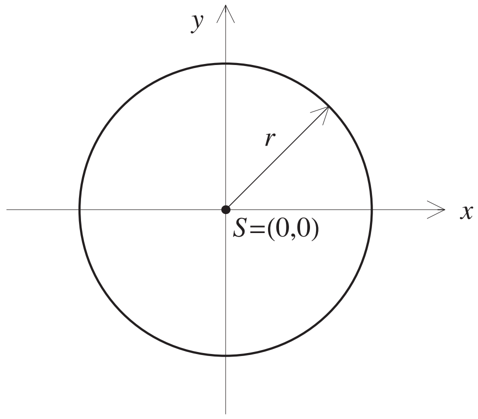
Kružnice se středem v počátku a poloměrem $r > 0$ je popsána rovnicí

$$x^2 + y^2 = r^2 ,$$

viz Obr. 4.17.

Kružnice se středem $S = (x_0, y_0)$ a poloměrem $r > 0$ je popsána rovnicí

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \ .$$



Obrázek 4.17: Kružnice o poloměru r a se středem v počátku.

Zřejmě, je-li rovnice (4.7) rovnicí kružnice, je nutně $A = B \neq 0$.

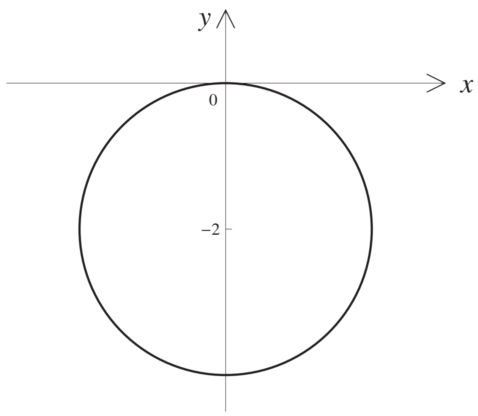
Příklad 4.12: Ukážeme, že rovnice

$$2x^2 + 2y^2 + 8y = 0$$

je rovnicí kružnice, a tuto kružnici nakreslíme. Opravdu, po vydělení dvěma a doplnění na čtverec dostáváme

$$x^2 + (y + 2)^2 = 4 \ .$$

Daná rovnice je tedy rovnicí kružnice o poloměru $r = 2$ a se středem v bodě $S = (0, -2)$, viz Obr. 4.18. Všimněme si, že daná kružnice prochází počátkem. ☺



Obrázek 4.18: Kružnice z Příkladu 4.12.

Ne vždy, je-li $A = B \neq 0$, je rovnice (4.7) rovnicí kružnice. Např. rovnici $x^2 + y^2 + 1 = 0$ nevyhovují souřadnice žádného bodu, rovnici $x^2 + y^2 = 0$ pouze souřadnice počátku.

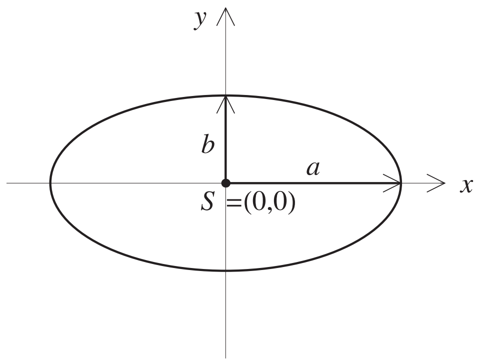
Elipsa se středem v počátku a poloosami $a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$, je popsána rovnicí

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ ,$$

viz Obr. 4.19.

Elipsa se středem $S = (x_0, y_0)$ a poloosami $a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$, je popsána rovnicí

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \ .$$



Obrázek 4.19: Elipsa.

Zřejmě, je-li rovnice (4.7) rovnicí elipsy, je nutně $A, B \neq 0$, $A \neq B$ a čísla A a B mají stejná znaménka.

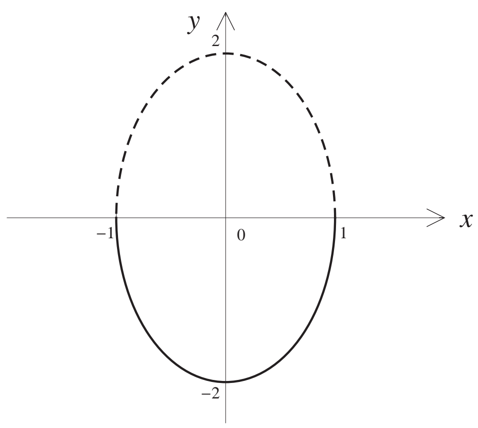
Příklad 4.13: Nakresleme křivku popsanou rovnicí

$$y = -\sqrt{4 - 4x^2} \ .$$

Daný předpis má zřejmě smysl pouze pro $x \in \langle -1, 1 \rangle$. Navíc je $y \leq 0$. Po umocnění obou stran rovnice a úpravě dostáváme

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \ ,$$

což je rovnice elipsy se středem v počátku a poloosami $a = 1$ a $b = 2$. Daná křivka je tedy pouze ta část elipsy, která leží pod a na ose x, viz Obr. 4.20. ☺



Obrázek 4.20: Část elipsy z Příkladu 4.13.

Parabola s vrcholem v počátku a osou totožnou s osou y je popsána rovnicí

$$y = ax^2 \ , a \neq 0 \ ,$$

viz Obr. 4.21.
Parabola s vrcholem $V = (x_0, y_0)$ a osou rovnoběžnou s osou y je popsána rovnicí

$$y - y_0 = a(x - x_0)^2 \ , a \neq 0 \ .$$

Podobně:

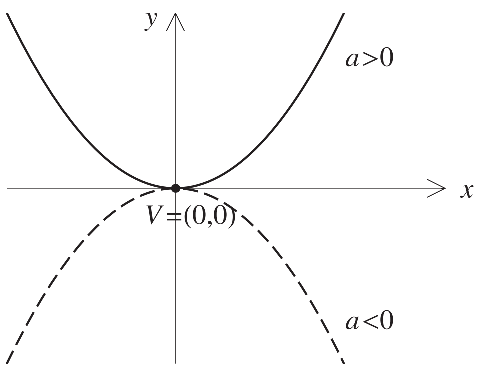
Parabola s vrcholem v počátku a osou totožnou s osou x je popsána rovnicí

$$x = ay^2 \ , a \neq 0 \ ,$$

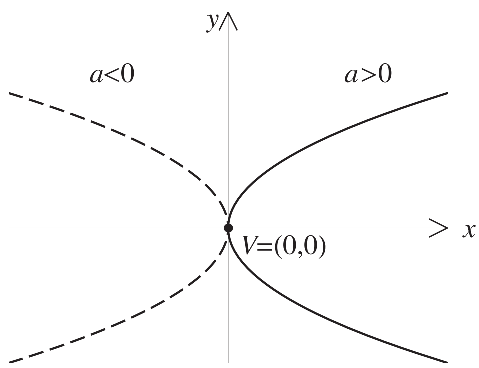
viz Obr. 4.22.
Parabola s vrcholem $V = (x_0, y_0)$ a osou rovnoběžnou s osou x je popsána rovnicí

$$x - x_0 = a(y - y_0)^2 \ , a \neq 0 \ .$$

Znaménko čísla a rozhoduje v obou případech o orientaci paraboly, jak je patrné z obrázků.



Obrázek 4.21: Parabola $y = ax^2$.



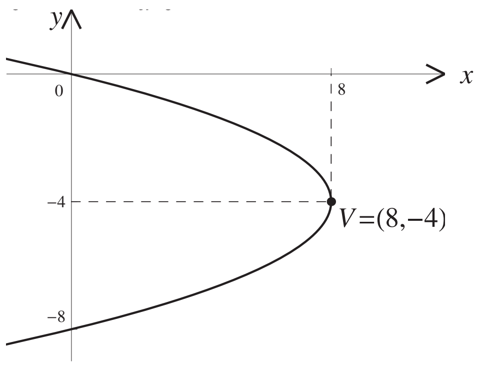
Obrázek 4.22: Parabola $x = ay^2$.

Zřejmě, je-li rovnice (4.7) rovnicí paraboly, je nutně jedno z čísel A nebo B rovno 0 a druhé nenulové. Je-li $A = 0$ a $B \neq 0$, je osa paraboly rovnoběžná s osou x, je-li $B = 0$ a $A \neq 0$, je osa paraboly rovnoběžná s osou y.

Příklad 4.14: Určeme a nakresleme kuželosečku popsanou rovnicí $2x + y^2 + 8y = 0$. Po doplnění na čtverec a úpravě dostáváme $2x + (y + 4)^2 = 16$, tj.

$$x - 8 = -\frac{1}{2}(y + 4)^2 \ ,$$

což je rovnice paraboly s vrcholem $V = (8, -4)$ a osou rovnoběžnou s osou x, viz Obr. 4.23.
☺



Obrázek 4.23: Parabola z Příkladu 4.14.

Hyperbola se středem v počátku a poloosami $a > 0$, $b > 0$ a hlavní osou (tj. přímkou procházející jejími vrcholy) totožnou s osou x je popsána rovnicí

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ ,$$

viz Obr. 4.24.
Hyperbola se středem $S = (x_0, y_0)$ a poloosami $a > 0$, $b > 0$ a hlavní osou rovnoběžnou s osou x je popsána rovnicí

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \ .$$

Hyperbola se středem v počátku a poloosami $a > 0$, $b > 0$ a hlavní osou totožnou s osou y je popsána rovnicí

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \ ,$$

viz Obr. 4.25.
Hyperbola se středem $S = (x_0, y_0)$ a poloosami $a > 0$, $b > 0$ a hlavní osou rovnoběžnou s osou y je popsána rovnicí

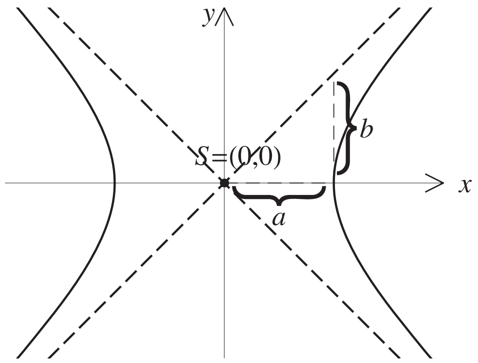
$$\frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(x - x_0)^2}{a^2} = 1 \ .$$

Zřejmě, je-li rovnice (4.7) rovnicí hyperboly, je nutně $A, B \neq 0$ a čísla A a B mají různá znaménka.

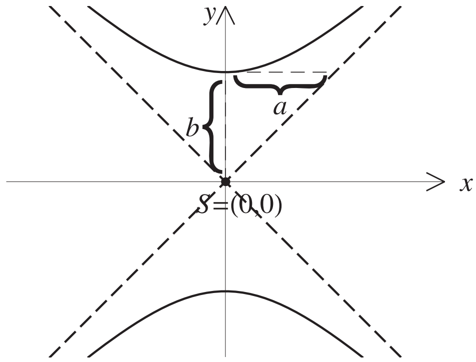
Příklad 4.15: Nakresleme kuželosečku popsanou rovnicí

$$y^2 = x^2 - 2x + 2 \ . \tag{4.8}$$

Doplněním na čtverec dostáváme rovnici $y^2 - (x - 1)^2 = 1$, což je rovnice hyperboly se středem v bodě $S = (1, 0)$, s poloosami $a = b = 1$ a s hlavní osou rovnoběžnou s osou y

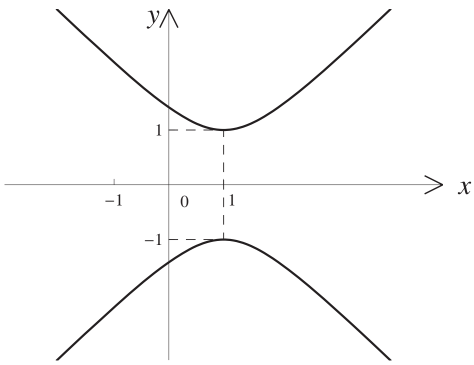


Obrázek 4.24: Hyperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.



Obrázek 4.25: Hyperbola $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$.

(je to přímka $x = 1$). Hyperbola je nakreslena na Obr. 4.26. Všimněme si, že část této hyperboly ležící nad osou x je popsána rovnicí $y = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$ a část ležící pod osou x rovnicí $y = -\sqrt{x^2 - 2x + 2}$. ☺



Obrázek 4.26: Hyperbola z Příkladu 4.15.

Cvičení

Cvičení 4.9: Určete o jakou kuželosečku se jedná a kuželosečku nakreslete, jeli zadaná rovnicí:

a) $x^2 - 2x = 2y - y^2$,

b) $x^2 = y^2 + 4y + 8$,

c) $x^2 + 6x + 2y^2 + 8 = 0$,

d) $x = y + y^2$,

e) $y = 4 - 2x - x^2$,

f) $x^2 - 2x + 2y^2 + 1 = 0$,

g) $x^2 - 2x - y^2 + 2 = 0$,

h) $x^2 + 2x = y^2 + 4y + 3$.

Cvičení 4.10: Nakreslete část kuželosečky popsané rovnicí:

a) $y = \sqrt{4 - x^2}$,

b) $y = -\sqrt{x^2 + 2x + 2}$,

c) $y = \sqrt{2x - 2x^2}$,

d) $y = \sqrt{1 - x}$.

Cvičení 4.11: Určete společné body části kuželosečky ze Cvičení 4.10 a přímky $y = -x$. Nakreslete si obrázek!

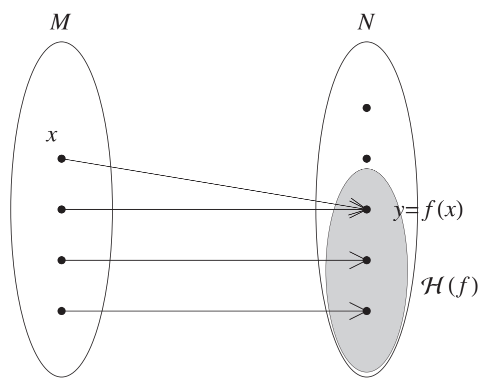
Kapitola 5

Funkce

Funkce popisuje závislost jedné veličiny na druhé. Např. dráha tělesa při volném pádu je funkcí času, tj. dráha závisí na době, během které těleso padá, obsah kruhu závisí na jeho poloměru apod.

Funkcí nebo ekvivalentně **zobrazením**, rozumíme předpis, který každému prvku x z jisté množiny M přiřadí právě jeden prvek y z jisté množiny N.

My se dále budeme zabývat pouze funkcemi, kdy obě množiny M, N jsou podmnožiny množiny reálných čísel. Mluvíme pak přesněji o reálné funkci (hodnoty proměnné y jsou reálná čísla) jedné reálné proměnné (hodnoty proměnné x jsou reálná čísla). Funkce budeme pojmenovávat (označovat) jmény. V matematice je zvykem označovat funkce písmeny f, g, h apod. To, že f je funkce, která přiřazuje prvkům množiny M prvky množiny N, zapisujeme jako $f : M \longrightarrow N$. Přiřazuje-li funkce f prvku $x \in M$ právě prvek $y \in N$, píšeme $y = f(x)$. Proměnnou x pak nazýváme nezávisle proměnnou a proměnou y závisle proměnnou. Říkáme také, že funkce f zobrazuje prvek x na prvek y. Množinu M nazýváme **definičním oborem** funkce f a značíme $\mathcal{D}(f)$. Množinu těch čísel $y \in N$, na které se zobrazuje nějaké číslo $x \in \mathcal{D}(f)$, nazýváme **oborem hodnot** funkce f a značíme $\mathcal{H}(f)$. Formálně zapsáno $\mathcal{H}(f) = \{y \in N; (\exists x \in M)(y = f(x))\}$. Popsaná situace je schematicky znázorněna diagramem na Obr. 5.1.



Obrázek 5.1: Schematické znázornění funkce $f : M \longrightarrow N$.

Příklad 5.1: $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, je příklad funkce, kterou jistě dobře znáte. Reálnému číslu x přiřazuje číslo $y = x^2$. Tedy např. $f(1) = 1$, $f(2) = 4$, $f(-1) = 1$ atd. Budeme-li ale uvažovat pouze $x \in \langle 0, 1\rangle$, dostaneme jinou funkci (nazvěme ji třeba g) $g(x) = x^2$, $x \in \langle 0, 1\rangle$. Definičním oborem funkce g je pouze interval $\langle 0, 1\rangle$, tj. $\mathcal{D}(g) = \langle 0, 1\rangle$, a např. zápis $g(2)$ nemá v tomto případě smysl. ☺

Zadáváme-li funkci, musíme zadat i její definiční obor. My v dalším textu budeme, pokud nebude řečeno jinak, uvažovat vždy tzv. přirozený definiční obor funkce.

Je-li dán nějaký předpis f, pak **přirozeným definičním oborem** funkce f rozumíme množinu těch $x \in \mathbb{R}$, pro které má výraz $f(x)$ smysl.

Je-li tedy $f(x) = x^3 - 1$, je $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, je-li $g(x) = 3 + \sqrt{x}$, je $\mathcal{D}(g) = \langle 0, \infty)$.

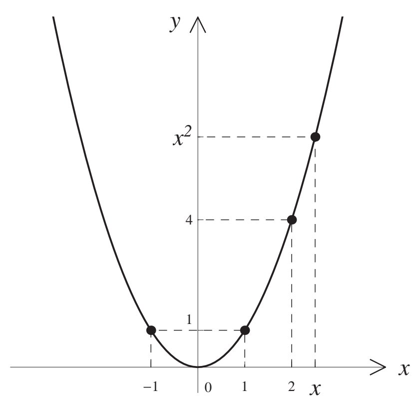
Velmi důležité je geometrické znázornění funkce, tzv. graf funkce. Formálně definujeme graf funkce následovně:

Je-li $f : M \longrightarrow N$, pak **grafem funkce** rozumíme množinu

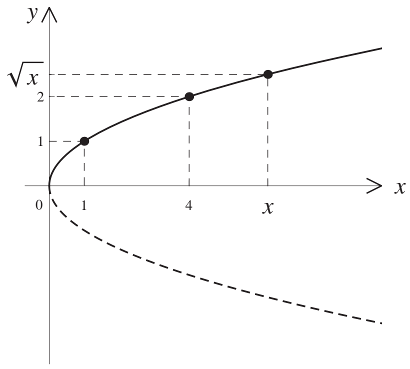
$$\text{graf}(f) = \{(x, y); x \in M,\ y = f(x)\}\ .$$

Grafem funkce f je tedy množina uspořádaných dvojic $(x, f(x))$, kde $x \in \mathcal{D}(f)$. Geometricky graf znázorňujeme v rovině s kartézskými souřadnicemi, viz odstavec 4.1.

Příklad 5.2: Na Obrázcích 5.2 a 5.3 jsou nakresleny grafy funkcí $f(x) = x^2$ a $g(x) = \sqrt{x}$ a vyznačeny některé jejich hodnoty. Zřejmě graf funkce f je parabola $y = x^2$. Funkce g je definována pouze pro $x \geq 0$, tj. $\mathcal{D}(g) = \langle 0, \infty)$. Je-li $y = \sqrt{x}$, pak $y^2 = x$, což je opět rovnice paraboly, jejíž osa je tentokrát osa x. Celá tato parabola ovšem nemůže být grafem funkce g, protože jedné hodnotě proměnné x by odpovídaly dvě hodnoty proměnné y. Zřejmě ale, je-li $y = \sqrt{x}$, je $y \geq 0$ a grafem funkce g je pouze ta část paraboly $y^2 = x$, která neleží pod osou x. (Zbylá část paraboly $y^2 = x$ je na Obrázku 5.3 znázorněna čárkovaně.) Z grafů funkcí f a g také snadno určíme jejich obory hodnot. Zřejmě $\mathcal{H}(f) = \mathcal{H}(g) = \langle 0, \infty)$. ☺



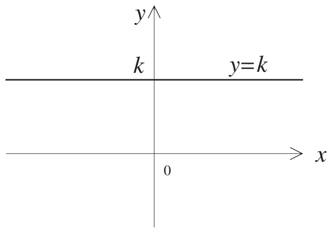
Obrázek 5.2: Graf funkce $y = x^2$.



Obrázek 5.3: Graf funkce $y = \sqrt{x}$.

5.1 Elementární funkce

V tomto odstavci si zopakujeme některé základní (elementární) funkce, s nimž jsme se v jiné formě setkali v předchozích kapitolách. Zejména se zaměříme na jejich definiční obory, obory hodnot a grafy. Asi nejjednodušší funkcí je konstantní funkce definovaná předpisem $y = k$, kde k je pevně zvolená konstanta. Tato funkce je definována pro všechna reálná čísla x a nabývá stále stejné hodnoty k. Její graf je zřejmě přímka rovnoběžná s osou x, viz Obr. 5.4.



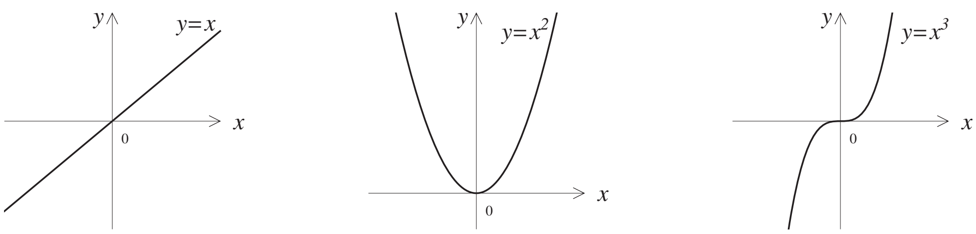
Obrázek 5.4: Graf konstantní funkce $y = k$.

V dalším budeme postupně probírat základní typy funkcí.

5.1.1 Mocniny a odmocniny

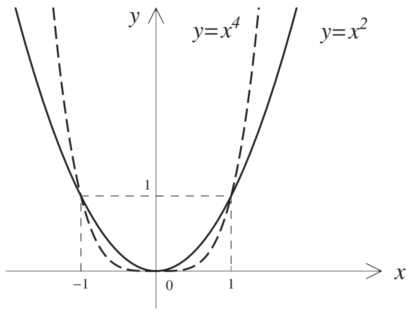
Celočíselné mocniny

Funkce $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^4$, … jsou definovány pro každé $x \in \mathbb{R}$. Grafy prvních tří jsou na Obrázku 5.5. Podobně jako graf funkce $y = x^2$ vypadají grafy funkcí $y = x^4$,



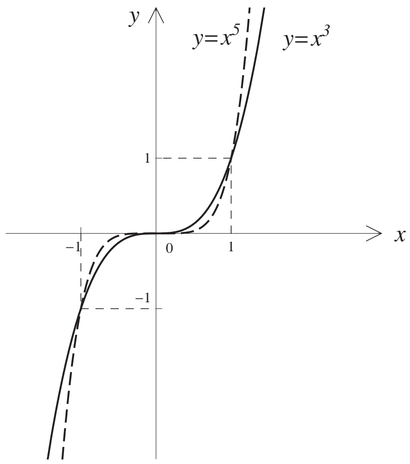
Obrázek 5.5: Grafy funkcí $y = x$, $y = x^2$ a $y = x^3$.

$y = x^6$, $y = x^8$, …, pouze s tím rozdílem, že s rostoucím exponentem jsou jejich hodnoty pro $|x| > 1$ vždy větší, a naopak pro $0 < |x| < 1$ vždy menší, viz Obr. 5.6. (Zřejmě totiž pro $k, l \in \mathbb{N}$, $k > l$ a $x > 1$ je $x^k > x^l$, a naopak pro $0 < x < 1$ je $x^k < x^l$.)



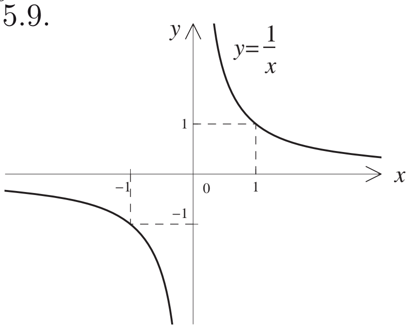
Obrázek 5.6: Porovnání grafů funkcí $y = x^2$ a $y = x^4$.

Podobně je tomu i pro liché mocniny, kdy grafy funkcí $y = x^5$, $y = x^7$, ... jsou podobné grafu funkce $y = x^3$. Na Obrázku 5.7 jsou porovnány grafy funkcí $y = x^3$ a $y = x^5$.

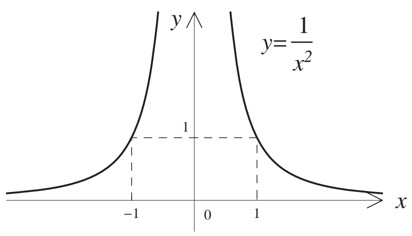


Obrázek 5.7: Porovnání grafů funkcí $y = x^3$ a $y = x^5$.

Funkce $y = \dfrac{1}{x}$, $y = \dfrac{1}{x^2}$, $y = \dfrac{1}{x^3}$, ... jsou definovány pro každé $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$. Graf funkce $y = \dfrac{1}{x}$ je znázorněn na Obr. 5.8 a grafem je hyperbola, graf funkce $y = \dfrac{1}{x^2}$ je znázorněn na Obr. 5.9.



Obrázek 5.8: Graf funkce $y = \dfrac{1}{x}$.

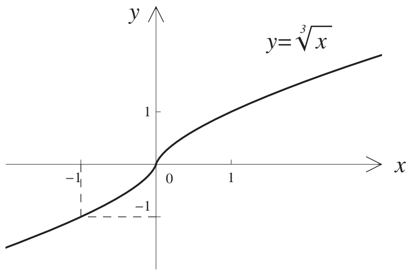


Obrázek 5.9: Graf funkce $y = \dfrac{1}{x^2}$.

Podobně jako graf funkce $y = \dfrac{1}{x}$ vypadají i grafy funkcí $y = \dfrac{1}{x^3}$, $y = \dfrac{1}{x^5}$, ... a podobně jako graf funkce $y = \dfrac{1}{x^2}$ vypadají i grafy funkcí $y = \dfrac{1}{x^4}$, $y = \dfrac{1}{x^6}$, ...

Odmocniny
Funkce $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[4]{x}$, $y = \sqrt[6]{x}, \ldots$ jsou definovány pro $x \in \langle 0, \infty)$. S grafem funkce $y = \sqrt{x}$ jsme se již setkali na Obr. 5.3. Podobně vypadají i grafy funkcí $y = \sqrt[k]{x}$, $k \in \mathbb{N}$, k sudé.

Funkce $y = \sqrt[3]{x}$, $y = \sqrt[5]{x}$, $y = \sqrt[7]{x}, \ldots$ jsou definovány pro $x \in \mathbb{R}$. Graf funkce $y = \sqrt[3]{x}$ je nakreslen na Obr. 5.10. Podobně vypadají i grafy funkcí $y = \sqrt[k]{x}$, $k \in \mathbb{N}$, $k > 3$, k liché.



Obrázek 5.10: Graf funkce $y = \sqrt[3]{x}$.

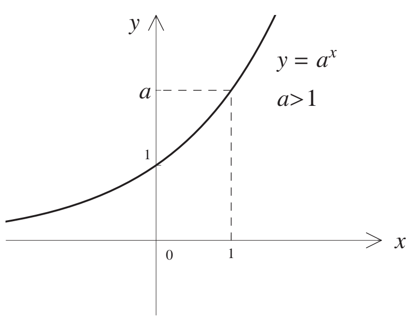
Obecná mocnina
Funkce $y = x^a$, kde $a > 0$ je pevné reálné číslo, které není celé, je definována pro $x \in \langle 0, \infty)$. Pro $a > 1$ je její graf podobný grafu funkce $y = x^2$, a tedy grafu libovolné celočíselné mocniny $y = x^k$, $k > 1$, uvažované pouze pro $x \geq 0$. Pro $0 < a < 1$ je její graf podobný grafu funkce $y = \sqrt{x}$, a tedy grafu libovolné celočíselné odmocniny $y = \sqrt[k]{x}$, $k > 1$, uvažované pouze pro $x \geq 0$.

Funkce $y = x^a$, kde $a < 0$ je pevné reálné číslo, které není celé, je definována pro $x \in (0, \infty)$. Její graf je podobný grafu funkce $y = \dfrac{1}{x}$ uvažované pouze pro $x > 0$.

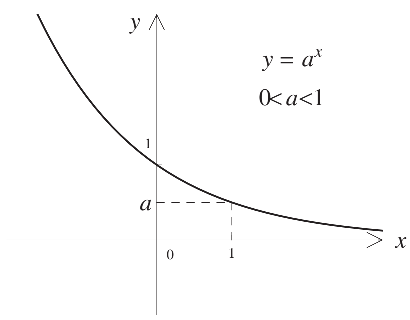
5.1.2 Exponenciální a logaritmické funkce

Exponenciální funkce $y = a^x$, kde a je pevné číslo takové, že buď $a > 1$, nebo $a \in (0, 1)$, je definována pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Zdůrazněme rozdíl mezi exponenciální funkcí $y = a^x$, kdy proměnnou je exponent x a základ a se nemění, a naopak obecnou mocninou $y = x^a$, kdy je proměnný základ x a nemění se exponent a. Nejčastěji budeme pracovat s exponenciálními funkcemi $y = 2^x$, $y = 10^x$ a zejména s funkcí $y = \mathrm{e}^x$, kde $\mathrm{e} = 2,718\ldots$ je tzv. Eulerovo číslo, s jehož přesnou definicí se seznámíte v předmětu Matematika I.

Grafy exponenciálních funkcí $y = a^x$ pro $a > 1$ jsou si všechny podobné, stejně tak grafy exponenciálních funkcí $y = a^x$ pro $a \in (0, 1)$ a jsou nakresleny na Obr. 5.11 a 5.12.



Obrázek 5.11: Graf funkce $y = a^x$, $a > 1$.



Obrázek 5.12: Graf funkce $y = a^x$, $a \in (0, 1)$.

Připomeňme si dvě základní pravidla pro počítání s exponenciálními funkcemi:

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y \qquad \text{a} \qquad (a^x)^y = a^{xy} \ . \tag{5.1}$$

Z druhého vztahu speciálně plyne, že $a^{-x} = (a^{-1})^x = \left(\dfrac{1}{a}\right)^x$, což ukazuje, že grafy exponenciálních funkcí a^x a $(\frac{1}{a})^x$ jsou vzájemně symetrické podle osy y, jak je též patrno z Obr. 5.11 a 5.12. Z těchto obrázků také okamžitě vidíme, že obor hodnot exponenciální funkce $y = a^x$ je interval $(0, \infty)$.

Logaritmickou funkci $y = \log_a x$, kde a je pevné číslo, $a > 1$, nebo $0 < a < 1$, zavádíme obvykle vztahem

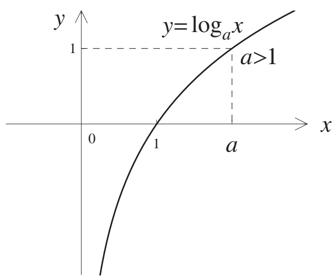
$$y = \log_a x \qquad \Longleftrightarrow \qquad a^y = x \ , \tag{5.2}$$

což lze slovně vyjádřit jako poučku, kterou možná znáte ze střední školy:

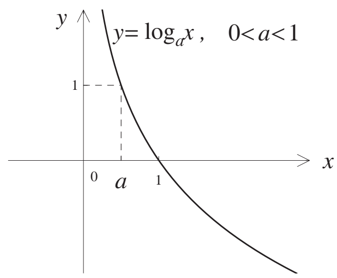
Logaritmus o základu a čísla x je takové číslo y, na které je nutno umocnit daný základ a, abychom dostali číslo x, jehož logaritmus hledáme.

Tedy např.: $\log_{10} 100 = 2$, protože $10^2 = 100$; $\log_2 \frac{1}{8} = -3$, protože $2^{-3} = \frac{1}{8}$; $\log_{\mathrm{e}} \mathrm{e} = 1$, protože $\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$ apod.

Grafy logaritmických funkcí $y = \log_a x$ pro $a > 1$ jsou si všechny podobné, stejně tak grafy logaritmických funkcí $y = \log_a x$ pro $a \in (0, 1)$ a jsou nakresleny na Obr. 5.13 a 5.14.



Obrázek 5.13: Graf funkce $y = \log_a x$, $a > 1$.



Obrázek 5.14: Graf funkce $y = \log_a x$, $a \in (0, 1)$.

Jelikož obor hodnot exponenciální funkce $x = a^y$ je interval $(0, \infty)$, plyne ze vztahu (5.2), že definiční obor logaritmické funkce $y = \log_a x$ je interval $(0, \infty)$, tj. logaritmus je definován pouze pro kladná čísla. Podobně, jelikož definičním oborem exponenciální funkce $x = a^y$ jsou všechna reálná čísla, je obor hodnot logaritmické funkce $y = \log_a x$ roven $\mathbb{R}$. To lze též vyčíst z grafu logaritmické funkce, viz Obr. 5.13 a 5.14.

Ze vztahů (5.1) a (5.2) lze odvodit známé vztahy pro počítání s logaritmy:

$$\begin{aligned} \log_a(x \cdot y) &= \log_a x + \log_a y \ , \text{pro } x > 0,\ y > 0 \ , \\ \log_a(x^y) &= y \cdot \log_a x \ , \text{pro } x > 0,\ y \in \mathbb{R} \ . \end{aligned}$$

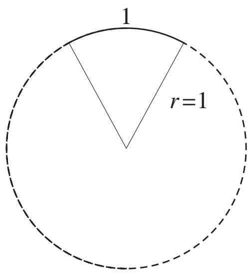
Důležitý je i následující vztah pro převádění logaritmů z jednoho základu na jiný. Platí:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}\ .$$

Logaritmus o základu 10 nazýváme dekadický a značíme obvykle log, logaritmus o základu e nazýváme přirozený a značíme ln. Tedy $\log x = \log_{10} x$ a $\ln x = \log_{\mathrm{e}} x$.

5.1.3 Goniometrické funkce

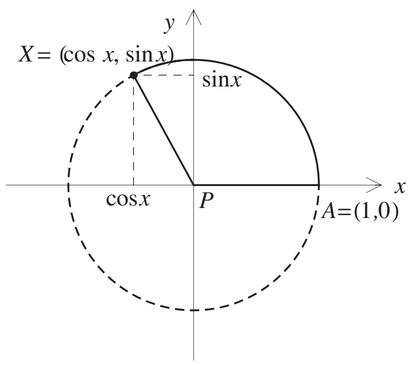
Dříve než se budeme zabývat goniometrickými funkcemi (funkcemi sinus, kosinus, tangens a kotangens), zopakujme si pojem obloukové míry. Velikost úhlu udáváme buď ve stupních, např. pravý úhel má velikost 90°, přímý úhel 180° atd., nebo v obloukové míře v radiánech, zkratka rad. Úhel velikosti 1 rad je úhel, který odpovídá oblouku délky 1 na jednotkové kružnici, tj. kružnici o poloměru 1, viz Obr. 5.15. Jelikož jednotková kružnice má obvod



Obrázek 5.15: Oblouková míra.

roven 2π, dostáváme, že pro velikosti úhlů např. platí $360° = 2\pi$ rad, $180° = \pi$ rad a $90° = \frac{1}{2}\pi$ rad atd. Jednotky rad obvykle nazapisujeme a úhel 3 znamená úhel velikosti 3 rad.

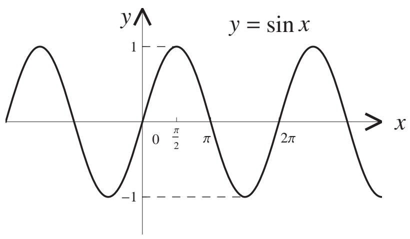
Přejděme nyní k definici funkcí sinus a kosinus. Uvažme v kartézské souřadnicové soustavě kružnici K o poloměru 1 se středem v počátku a na ní bod $A = (1, 0)$. Zvolme $x \in \mathbb{R}$. Pro $x \geq 0$ posunujme bod A po kružnici K v kladném směru (tj. proti směru hodinových ručiček) tak, že urazí dráhu x. Bod, do kterého bod A takto přejde, označme X. Pak x-ová souřadnice bodu X je právě hodnota $\cos x$ a y-ová souřadnice bodu X je právě hodnota $\sin x$, tedy $X = (\cos x, \sin x)$, viz Obr. 5.16. (Uvědomme si, že pro $x \in \langle 0, 2\pi)$ je velikost úhlu $\measuredangle APX$ právě x.)



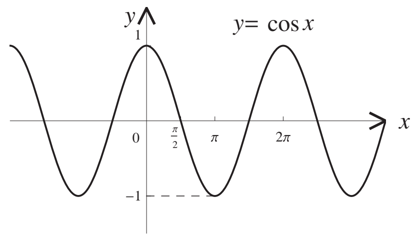
Obrázek 5.16: Zavedení funkcí $y = \sin x$ a $y = \cos x$.

Pro $x < 0$ posunujme bod A po kružnici K v záporném směru (tj. po směru hodinových ručiček) tak, že urazí dráhu $-x$. Opět označme bod, do kterého bod A takto přejde, jako bod X. Pak stejně x-ová souřadnice bodu X je hodnota $\cos x$ a y-ová souřadnice bodu X je hodnota $\sin x$.

Zřejmě tedy funkce $y = \sin x$ a $y = \cos x$ jsou obě definovány pro každé $x \in \mathbb{R}$, jejich oborem hodnot je interval $\langle -1, 1 \rangle$. Jejich grafy jsou nakresleny na Obr. 5.17 a 5.18.



Obrázek 5.17: Graf funkce $y = \sin x$.



Obrázek 5.18: Graf funkce $y = \cos x$.

Z předchozího zavedení funkcí $y = \sin x$ a $y = \cos x$ dostáváme okamžitě některé důležité vztahy platné pro každé $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x \ , \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x \ . \tag{5.3}$$

(Říkáme též, že funkce $y = \sin x$ a $y = \cos x$ mají periodu 2π.)
Dále

$$\sin(-x) = -\sin x \ , \quad \cos(-x) = \cos x \ . \tag{5.4}$$

(Říkáme též, že funkce $y = \sin x$ je funkce lichá, její graf je symetrický podle počátku, a funkce $y = \cos x$ funkce sudá, její graf je symetrický podle osy y.)
Konečně z Pythagorovy věty dostáváme

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \ . \tag{5.5}$$

S trochu větším úsilím je možno odvodit i další vzorce. Z nich je užitečné si zapamatovat vztahy pro hodnoty funkcí sin a cos pro součet dvou úhlů:

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \ , \\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \ . \end{aligned} \tag{5.6}$$

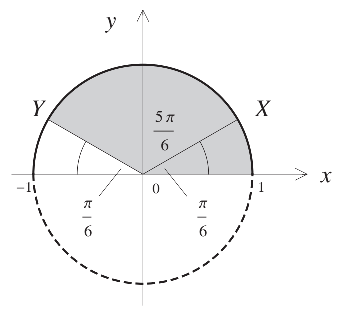
Odtud speciálně, položíme-li $y = x$, dostaneme

$$\begin{aligned} \sin 2x &= 2 \sin x \cos x, \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \ . \end{aligned}$$

Rovněž je důležité znát hodnoty funkcí pro konkrétní hodnoty proměnné x uvedené v následující tabulce:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Příklad 5.3: Pomocí předchozí tabulky určeme hodnoty $\sin \frac{5}{6}\pi$ a $\cos \frac{5}{6}\pi$.
Protože platí $\frac{5}{6}\pi = \pi - \frac{1}{6}\pi$, dostáváme porovnáním souřadnic bodů X a Y na Obr. 5.19 $\sin \frac{5}{6}\pi = \sin \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}$ a $\cos \frac{5}{6}\pi = -\cos \frac{1}{6}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. ☺

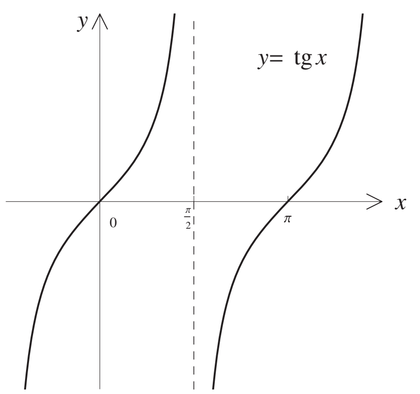


Obrázek 5.19: Určení hodnot $\sin \frac{5}{6}\pi$ a $\cos \frac{5}{6}\pi$.

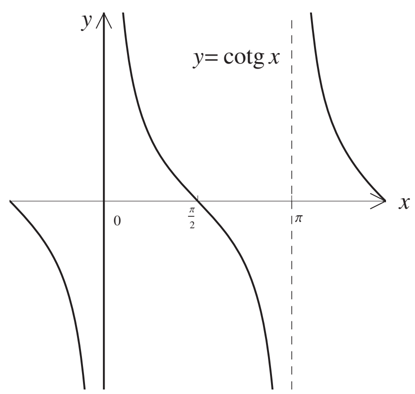
Další goniometrické funkce, se kterými se seznámíme, jsou funkce tangens a kotangens. Ty se obvykle zavádějí pomocí následujících vztahů:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}\ , \quad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}\ . \tag{5.7}$$

Odtud vidíme, že funkce $y = \operatorname{tg} x$ je definována pro ty hodnoty $x \in \mathbb{R}$, kdy $\cos x \neq 0$, tedy pro $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, a dále funkce $y = \operatorname{cotg} x$ je definována pro ty hodnoty $x \in \mathbb{R}$, kdy $\sin x \neq 0$, tedy pro $x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Grafy těchto funkcí jsou nakresleny na Obr. 5.20 a 5.21.



Obrázek 5.20: Graf funkce $y = \operatorname{tg} x$.



Obrázek 5.21: Graf funkce $y = \operatorname{cotg} x$.

Ze vztahů (5.7) okamžitě plyne

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{cotg} x} \ ,$$

pokud jsou obě funkce $y = \operatorname{tg} x$ a $y = \operatorname{cotg} x$ definovány, tj. $x \neq k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Příklad 5.4: Odvoďme vzorec pro tangens rozdílu dvou úhlů, který jsme používali při určení úhlu dvou přímek v předchozí kapitole. Nechť jsou definovány hodnoty $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{tg} y$ a $\operatorname{tg}(x-y)$, tj. $x, y, x-y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, pak platí

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(x-y) &= \frac{\sin(x-y)}{\cos(x-y)} = \frac{\sin x \cos(-y) + \cos x \sin(-y)}{\cos x \cos(-y) - \sin x \sin(-y)} = \frac{\sin x \cos y - \cos x \sin y}{\cos x \cos y + \sin x \sin y} = \\ &= \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y} \ . \end{aligned}$$

V úpravách jsme využili vztahů (5.4) a (5.6), poslední rovnost jsme získali tak, že čitatele i jmenovatele jsme vydělili výrazem $\cos x \cos y$. ☺

Cvičení

Cvičení 5.1: Do jednoho obrázku nakreslete grafy funkcí f a g, kde:

a) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x^3}$,
b) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt[4]{x}$,
c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $g(x) = \sqrt[5]{x}$,
d) $f(x) = x^{\sqrt{2}}$, $g(x) = x^{\sqrt{3}}$,
e) $f(x) = \ln x$, $g(x) = \log x$,
f) $f(x) = (\frac{1}{2})^x$, $g(x) = (\frac{1}{4})^x$.

Cvičení 5.2: Jaký je rozdíl mezi funkcemi $f(x) = \sqrt[3]{x}$ a $g(x) = x^{\frac{1}{3}}$?

Cvičení 5.3: Určete definiční obor a obor hodnot funkce f, kde:

a) $f(x) = x^4$,
b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$,
c) $f(x) = x^{2k+1},\ k \in \mathbb{N}$,
d) $f(x) = \sqrt[2k]{x},\ k \in \mathbb{N}$,
e) $f(x) = \frac{1}{x}$,
f) $f(x) = \frac{1}{x^2}$,
g) $f(x) = x^{\sqrt{3}}$,
h) $f(x) = x^{0{,}421}$,
i) $f(x) = 2^x$,
j) $f(x) = (\frac{1}{\mathrm{e}})^x$,
k) $f(x) = \log x$,
l) $f(x) = \log_{0{,}2} x$,
m) $f(x) = \cos x$,
n) $f(x) = \operatorname{cotg} x$,
o) $f(x) = |\sin x|$.

Cvičení 5.4: Vyčíslete následující hodnoty:

a) $\ln(\mathrm{e}^2)$,
b) $(\ln \frac{1}{\mathrm{e}})^{-1}$,
c) $\log_2 64$,
d) $\log_3 \frac{1}{27}$,
e) $\log 10^{-5}$,
f) $\log_2 (\frac{1}{2})^{10}$,
g) $\log(-\frac{1}{2})$,
h) $(\frac{1}{9})^{-\frac{1}{2}}$,
i) $(-2)^{-2}$.

Cvičení 5.5: Určete hodnoty x, pro které platí:

a) $\log x = 10$,
b) $\ln x = 0$,
c) $\log_2 x = -3$,
d) $\mathrm{e}^x = 10$,
e) $2^x = -5$,
f) $10^x = 2$.

Cvičení 5.6: Sestavte tabulku hodnot funkcí $y = \operatorname{tg} x$ a $y = \operatorname{cotg} x$ pro $x = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$.

Cvičení 5.7: Vyčíslete následující hodnoty:

a) $\cos \frac{7}{4}\pi$, **b)** $\sin \frac{28}{3}\pi$, **c)** $\cos(-\frac{2}{3}\pi)$,

d) $\cos(3^{10}\pi)$, **e)** $\sin 315°$, **f)** $\sin(-\frac{\pi}{6})$,

g) $\operatorname{tg} 5\pi$, **h)** $\operatorname{cotg}(-\frac{7}{4}\pi)$, **i)** $\operatorname{cotg}(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2})$.

Cvičení 5.8: Ukažte, že pro x, pro která mají následující výrazy smysl, platí:

a) $\sin(x + \pi) = -\sin x$, **b)** $\cos(x + \pi) = -\cos x$,

c) $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$, **d)** $\operatorname{cotg}(x + \pi) = \operatorname{cotg} x$.

Cvičení 5.9: Odvoďte vztahy pro:

a) $\sin(x + \frac{\pi}{2})$, **b)** $\cos(x + \frac{\pi}{2})$,

c) $\operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{2})$, **d)** $\operatorname{cotg}(x + \frac{\pi}{2})$.

5.2 Operace s funkcemi

Z funkcí, se kterými jsme se seznámili v předchozím odstavci, můžeme pomocí algebraických operací (sčítání, odčítání, násobení a dělení) a také operací skládání vytvářet další funkce. Např. $y = \ln x + \cos x$ je součet funkcí $y = \ln x$ a $y = \cos x$. Podobně $y = x^2 \cdot \operatorname{tg} x$ je součin funkcí $y = x^2$ a $y = \operatorname{tg} x$ a konečně $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$ je podíl funkcí $y = \sqrt{x}$ a $y = x - 1$.

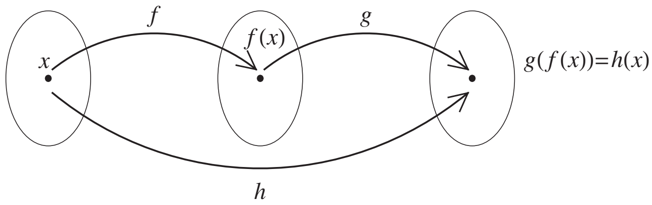
Formálně, jsou-li dány dvě funkce $y = f(x)$ a $y = g(x)$, pak:

- **Součtem** funkcí f a g rozumíme funkci $h(x) = f(x) + g(x)$ definovanou pro ta $x \in \mathbb{R}$, pro která jsou definovány obě funkce f a g, tj. $\mathcal{D}(h) = \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g)$.
- **Rozdílem** funkcí f a g rozumíme funkci $h(x) = f(x) - g(x)$ definovanou pro ta $x \in \mathbb{R}$, pro která jsou definovány obě funkce f a g, tj. $\mathcal{D}(h) = \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g)$.
- **Součinem** funkcí f a g rozumíme funkci $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ definovanou pro ta $x \in \mathbb{R}$, pro která jsou definovány obě funkce f a g, tj. $\mathcal{D}(h) = \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g)$.
- **Podílem** funkcí f a g rozumíme funkci $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ definovanou pro ta $x \in \mathbb{R}$, pro která jsou definovány obě funkce f a g a navíc $g(x) \neq 0$, tj.
$$\mathcal{D}(h) = (\mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g)) \setminus \{x \in \mathbb{R};\ g(x) = 0\}.$$

Tedy např. funkce $y = \ln x + \cos x$ je definována pro $x > 0$ a funkce $y = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$ pro $x \in \langle 0, 1) \cup (1, \infty)$.

Složená funkce

Důležitou operací je skládání funkcí. Opět, jsou-li dány dvě funkce $y = f(x)$ a $y = g(x)$, můžeme vytvořit novou funkci $h(x) = g(f(x))$, tj. hodnota $h(x)$ se vypočte tak, že k číslu x vypočteme nejprve hodnotu $f(x)$ a na ni pak aplikujeme funkci g. Dostaneme $h(x) = g(f(x))$. Schematicky je složení funkcí znázorněno na Obr. 5.22. Složená



Obrázek 5.22: Složená funkce $h(x) = g(f(x))$.

funkce $h(x) = g(f(x))$ je definována pouze pro ta $x \in \mathcal{D}(f)$, pro která je $f(x) \in \mathcal{D}(g)$, tj. $\mathcal{D}(h) = \{x \in \mathcal{D}(f);\ f(x) \in \mathcal{D}(g)\}$. Formálně značíme složenou funkci jako $h = g \circ f$. Pozor! Při skládání funkcí záleží obecně na pořadí, ve kterém funkce skládáme, a obecně je $g \circ f \neq f \circ g$. Např. je-li $f(x) = \sin x$ a $g(x) = x^2$, pak $g(f(x)) = (\sin x)^2$, ale $f(g(x)) = \sin(x^2)$. Obvykle místo $(f(x))^2$ píšeme $f^2(x)$. (A podobně i pro vyšší mocniny.) Tedy v našem příkladě je $g(f(x)) = \sin^2 x$.

Příklad 5.5: Zapišme funkci $h(x) = \ln(1-x^2)$ jako složenou funkci a určeme její definiční obor.
Označíme-li $f(x) = 1 - x^2$ (rozdíl konstantní funkce $y = 1$ a funkce $y = x^2$) a $g(x) = \ln x$, pak $h(x) = g(f(x)) = g(1 - x^2) = \ln(1 - x^2)$, tj. $h = g \circ f$. Při určování definičního oboru složené funkce začínáme obvykle od vnější funkce, v našem případě od funkce $g(x) = \ln x$. Aby funkce $y = \ln(1 - x^2)$ byla definována, musí být $1 - x^2 > 0$ (logaritmus je definován pouze pro kladná čísla). Tedy musí platit $x^2 < 1$, což splňují právě $x \in (-1, 1)$ a dostáváme $\mathcal{D}(h) = (-1, 1)$. ☺

Příklad 5.6: Jsou dány funkce $f(x) = \dfrac{1}{x}$ a $g(x) = \sqrt{1 + x}$. Určeme funkční předpisy a definiční obory funkcí $h_1 = f \circ f$, $h_2 = g \circ f$, $h_3 = f \circ g$ a $h_4 = g \circ g$.
Zřejmě

$$h_1(x) = f(f(x)) = f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x\ .$$

(Poslední rovnost platí pouze pro $x \neq 0$.) Protože funkce f je definována pouze pro $x \neq 0$ a $f(x) = \frac{1}{x} \neq 0$ vždy, je funkce h_1 definována pro $x \neq 0$. (Samozřejmě funkce $y = x$ je definována pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Zde ale $h_1(x) = x$ chápána jako složená funkce $h_1 = f \circ f$, je definována pouze pro $x \neq 0$.)

$$h_2(x) = g(f(x)) = g(\frac{1}{x}) = \sqrt{1 + \frac{1}{x}}\ .$$

Funkce h_2 bude definována, pokud $1 + \frac{1}{x} \geq 0$, tj. $\frac{1}{x} \geq -1$, což platí pro všechna kladná x a ze záporných x pouze pro $x \in (-\infty, -1\rangle$. Tedy $\mathcal{D}(h_2) = (-\infty, -1\rangle \cup (0, \infty)$.

$$h_3(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{1 + x}) = \frac{1}{\sqrt{1 + x}}\ .$$

Funkce h_3 bude definována, pokud $1 + x > 0$, tj. $x > -1$. Tedy $\mathcal{D}(h_3) = (-1, \infty)$.

$$h_4(x) = g(g(x)) = g(\sqrt{1 + x}) = \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}\ .$$

Funkce h_4 bude definována, pokud $1+\sqrt{1+x} \geq 0$, což je vždy, má-li výraz $\sqrt{1+x}$ smysl, tedy pro $x \geq -1$. $\mathcal{D}(h_4) = \langle -1, \infty)$. ☺

Cvičení

Cvičení 5.10: Určete definiční obor funkce f, kde:

a) $f(x) = \sqrt{1-x^3}$, **b)** $f(x) = \mathrm{e}^{x^2+3x+4}$, **c)** $f(x) = \mathrm{e}^{x^2+3x-4}$,

d) $f(x) = \ln(x^2+3x+4)$, **e)** $f(x) = \ln(x^2+3x-4)$, **f)** $f(x) = \sqrt{3-\log x}$,

g) $f(x) = \sqrt{2+\ln x - \ln^2 x}$, **h)** $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2} - \sin x}$, **i)** $f(x) = \frac{1}{1-3^{x-4}}$,

j) $f(x) = \sqrt{1+\operatorname{cotg} x}$, **k)** $f(x) = \log(1-x^{10})$, **l)** $f(x) = \cos(3+2x-x^2)$.

Cvičení 5.11: Určete funkci $h = f \circ g$ a její definiční obor, je-li:

a) $f(x) = x^2+1$, $g(x) = \sqrt{\mathrm{e}^x+1}$, **b)** $f(x) = \log x$, $g(x) = 1-x^2$,

c) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 1-\mathrm{e}^x$, **d)** $f(x) = \sqrt{x^3}$, $g(x) = \cos x + 1$,

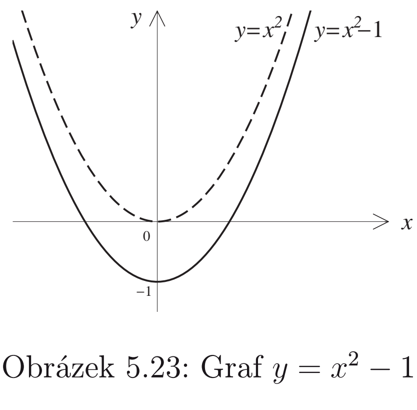
e) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \ln(-x^2-5x-4)$, **f)** $f(x) = \sin(x^2+1)$, $g(x) = \sqrt{x+1}$.

5.3 Jednoduché modifikace funkce $y = f(x)$

V tomto odstavci si ukážeme, jak některé jednoduché modifikace změní graf funkce. Jednotlivé případy se ilustrujeme na příkladech. Modifikace, i když jednoduché, je důležité si dobře rozmyslet. V dalším předpokládáme, že $y = f(x)$ je daná funkce a čísla $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ pevně zvolené konstanty.

5.3.1 Funkce $g(x) = f(x) + a$

Zřejmě graf funkce g bude posunut oproti grafu funkce f ve směru osy y; pro $a > 0$ budou hodnoty $g(x)$ posunuty o a směrem „nahoru“, pro $a < 0$ budou hodnoty $g(x)$ posunuty o $|a|$ směrem „dolů“.



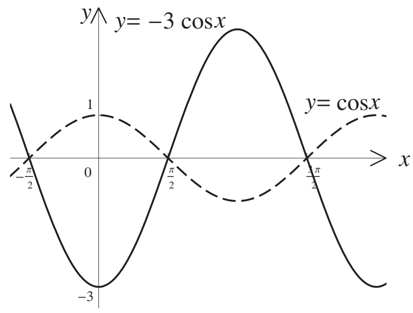
Obrázek 5.23: Graf $y = x^2 - 1$.

Příklad 5.7: Nakresleme graf funkce $g(x) = x^2 - 1$ (tj. $f(x) = x^2$ a $a = -1$). Vyjdeme z grafu funkce f, který dobře známe, a posuneme jej o $|a| = 1$ směrem dolů, viz Obr. 5.23. Grafem je zřejmě opět parabola, tentokrát s vrcholem v bodě $(0, -1)$. ☺

5.3.2 Funkce $g(x) = b \cdot f(x)$

Vynásobení konstantou $b \neq 0$ „protáhne“ graf funkce f $|b|$-krát ve směru osy y. Přitom pro $b < 0$ se graf ještě „překlopí“ kolem osy x.

Příklad 5.8: Nakresleme graf funkce $g(x) = -3\cos x$ (tj. $f(x) = \cos x$ a $b = -3$). Hodnota funkce $g(x)$ bude v absolutní hodnotě 3-krát větší než hodnota $f(x)$, ale opačného znaménka (např. $g(0) = -3$ a $f(0) = 1$). Celá situace je znázorněna na Obr. 5.24. ☺

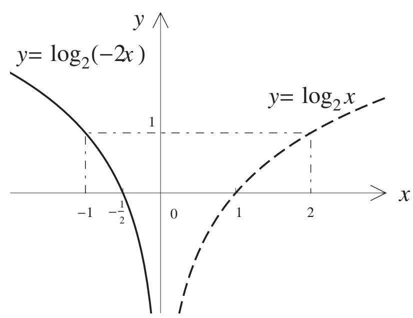


Obrázek 5.24: Graf $y = -3\cos x$.

5.3.3 Funkce $g(x) = f(c \cdot x)$

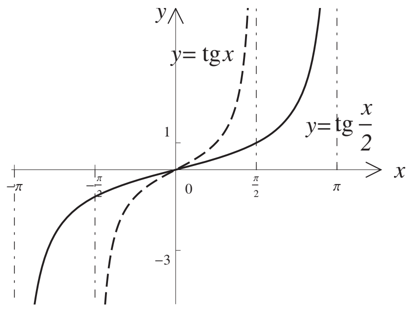
Vynásobení konstantou $c \neq 0$ „protáhne“ graf funkce f $\left|\frac{1}{c}\right|$-krát ve směru osy x. Přitom pro $c < 0$ se graf ještě „překlopí“ kolem osy y.

Příklad 5.9: Nakresleme graf funkce $g(x) = \log_2(-2x)$ (tj. $f(x) = \log_2 x$ a $c = -2$). Tato funkce je zřejmě definována pro $-2x > 0$, tj. pro $x < 0$. Např. hodnotu 1, kterou funkce f nabývá pro $x = 2$, nabývá funkce g pro $x = -1$. Celá situace je znázorněna na Obr. 5.25. Všimněme si ještě, že $g(x) = \log_2(-2x) = \log_2(2(-x)) = \log_2 2 + \log_2(-x) = 1 + \log_2(-x)$. Tedy graf funkce g lze také získat jako graf funkce $\log_2(-x)$ (graf $\log_2(-x)$ je souměrně sdružený s grafem $\log_2 x$ podle osy y) a posunutý o 1 ve směru osy y „nahoru“. ☺



Obrázek 5.25: Graf $y = \log_2(-2x)$.

Příklad 5.10: Nakresleme graf funkce $g(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ (tj. $f(x) = \operatorname{tg} x$ a $c = \frac{1}{2}$). Graf funkce g je zřejmě 2-krát protažený ve směru osy x oproti grafu f. Má-li tedy funkce f periodu π, má funkce g periodu 2π. Celá situace je znázorněna na Obr. 5.26. Pro větší názornost jsou zde znázorněny hodnoty f pro $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a hodnoty g pro $x \in (-\pi, \pi)$. ☺

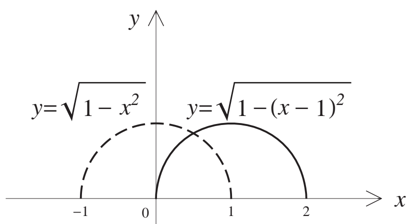


Obrázek 5.26: Graf $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

5.3.4 Funkce $g(x) = f(x + d)$

Přičtení konstanty d k proměnné x posune graf funkce f podél osy x o číslo $|d|$. Pro $d > 0$ se posune graf f doleva a pro $d < 0$ doprava.

Příklad 5.11: Nakresleme graf funkce $g(x) = \sqrt{1 - (x-1)^2}$ (tj. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ a $d = -1$. Z předchozí kapitoly víme, že grafem funkce f je půlkružnice a tvoří jej body kružnice $x^2 + y^2 = 1$ s y-ovou souřadnicí ≥ 0. Graf g je posunut o 1 směrem doprava. Graf g je tedy opět půlkružnice se středem v bodě $(1, 0)$, viz Obr. 5.27. Z uvedeného by mělo být jasné, že $\mathcal{D}(g) = \langle 0, 2 \rangle$. (Funkční předpis g lze ovšem také zapsat ve tvaru $g(x) = \sqrt{2x - x^2}$ a teprve doplněním na čtverec z něj získat původní předpis.) ☺

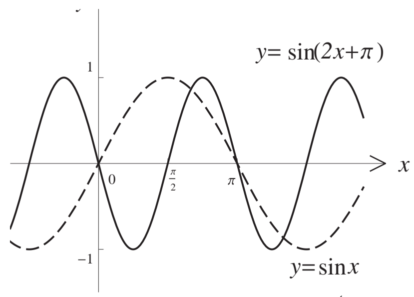


Obrázek 5.27: Graf $y = \sqrt{1 - (x-1)^2}$.

Příklad 5.12: Nakresleme graf funkce $g(x) = \sin(2x + \pi)$. Abychom zjistili posunutí ve směru osy x, musíme nejprve funkční předpis upravit do tvaru $g(x) = \sin(2(x + \frac{\pi}{2}))$ (tj. $f(x) = \sin x$, $d = \frac{\pi}{2}$, $c = 2$). Graf g je tedy vlastně graf funkce $f(x) = \sin x$ protažený $\frac{1}{2}$-krát (tj. zkrácený 2-krát) ve směru osy x a posunutý o $\frac{\pi}{2}$ doleva, viz Obr. 5.28. Všimněme si, že pomocí vztahů 5.6 můžeme funkci g také vyjádřit ve tvaru

$$g(x) = \sin(2x + \pi) = \sin 2x \cdot \sin \pi + \cos 2x \cdot \sin \pi = -\sin 2x \,.$$

☺



Obrázek 5.28: Graf $y = \sin(2x + \pi)$.

Cvičení

Cvičení 5.12: Určete definiční obor funkce f, průsečíky jejího grafu s osami a graf nakreslete, kde:

a) $f(x) = \mathrm{e}^x - 1$, **b)** $f(x) = \cos x + 1$, **c)** $f(x) = \mathrm{e} + \ln x$,

d) $f(x) = -\log x$, **e)** $f(x) = 2\sin x$, **f)** $f(x) = 3x^3$,

g) $f(x) = \sin(2x)$, **h)** $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$, **i)** $f(x) = \mathrm{cotg}\,(-2x)$,

j) $f(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2})$, **k)** $f(x) = \sqrt{x+4}$, **l)** $f(x) = 1 - \log(x-1)$,

m) $f(x) = 2\mathrm{e}^{2-x}$, **n)** $f(x) = 3\cos\frac{x}{3}$, **o)** $f(x) = \frac{2}{(x+2)^2}$,

p) $f(x) = \sin(3x + \pi)$, **q)** $f(x) = \ln(2x - 1)$, **r)** $f(x) = -\mathrm{tg}\,(2x)$.

Cvičení 5.13: S využitím výsledků předchozí kapitoly určete definiční obor a nakreslete graf funkce f, kde:

a) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, **b)** $f(x) = -\sqrt{1 - 2x^2}$, **c)** $f(x) = 2 - \sqrt{2 - x}$,

d) $f(x) = \sqrt{4x + x^2}$, **e)** $f(x) = \sqrt{4x - x^2}$, **f)** $f(x) = -1 + \sqrt{2 + 2x + x^2}$.

Kapitola 6

Komplexní čísla

Většinu úloh (úprava algebraických výrazů, řešení rovnic a nerovnic), které jsme doposud řešili, jsme řešili v oboru reálných čísel. Existuje ale mnoho problémů, které v oboru reálných čísel nemají řešení (např. kvadratická rovnice $x^2 + 1 = 0$). Obor komplexních čísel vznikl rozšířením oboru reálných čísel tak, aby každá algebraická rovnice v něm měla řešení. Myšlenkou komplexních čísel se zabývali mnozí matematici jako Gerolamo Cardano (16. století), René Descartes (17. století) a Leonhard Euler (18. století). Teorii komplexních čísel přesně zavedl v 19. století francouzský matematik Augustin Louis Cauchy a nezávisle na něm německý matematik a fyzik Carl Friedrich Gauss. Dnes se komplexní čísla používají v mnoha technických oborech.

6.1 Základní pojmy

Komplexní čísla zavádíme jako uspořádané dvojice reálných čísel. Tedy množina komplexních čísel

$$\mathbb{C} = \{z = (a, b)\,;\ a, b \in \mathbb{R}\}\,.$$

Podobně jako jiná čísla můžeme komplexní čísla sčítat, odčítat, násobit a dělit. Pro zavedení těchto operací je výhodné psát komplexní číslo $z = (a, b)$ v **algebraickém tvaru** jako

$$z = a + b\,\mathrm{i}\ ,$$

kde i je zvláštní symbol, tzv. **imaginární jednotka**. Fakticky na tento zápis můžeme pohlížet tak, že symbol i označuje, co je druhá souřadnice komplexního čísla z, a část bez i je první souřadnice.

Je-li komplexní číslo $z = a + b\,\mathrm{i}$, kde a, $b \in \mathbb{R}$, nazýváme číslo a **reálnou částí** komplexního čísla z, číslo b jeho **imaginární částí**. Reálnou část komplexního čísla z značíme $\mathrm{Re}(z)$, imaginární část značíme $\mathrm{Im}(z)$. Reálná čísla pak ztotožňujeme s komplexními čísly, která mají imaginární část rovnu 0, tj. pro $a \in \mathbb{R}$ je $a = a + 0\,\mathrm{i}$. Naopak komplexní číslo z, které má reálnou část rovnu 0, tj. $z = 0 + b\,\mathrm{i} = b\,\mathrm{i}$, nazýváme ryze imaginární.

Součet a rozdíl dvou komplexních čísel definujeme po souřadnicích:

Pro $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 = a + b\,\mathrm{i}$, $z_2 = c + d\,\mathrm{i}$ klademe

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a + b\,\mathrm{i}) + (c + d\,\mathrm{i}) &= (a + c) + (b + d)\,\mathrm{i} \\ z_1 - z_2 &= (a + b\,\mathrm{i}) - (c + d\,\mathrm{i}) &= (a - c) + (b - d)\,\mathrm{i}\ . \end{aligned}$$

Součin dvou komplexních čísel je definován poněkud komplikovaněji:

Pro $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 = a + b\,\mathrm{i}$, $z_2 = c + d\,\mathrm{i}$ klademe

$$z_1 \cdot z_2 = (a + b\,\mathrm{i}) \cdot (c + d\,\mathrm{i}) = (a\,c - b\,d) + (a\,d + b\,c)\,\mathrm{i}\ .$$

Všimněme si, že z definice násobení (dosazením $z_1 = \mathrm{i}$ a $z_2 = \mathrm{i}$) plyne

$$\mathrm{i}^2 = -1\,,$$

tedy i je řešení již zmíněné rovnice $x^2 + 1 = 0$. Důležité je, že na násobení komplexních čísel můžeme pohlížet jako na násobení dvojčlenu dvojčlenem s tím, že využijeme vztahu $\mathrm{i}^2 = -1$ a jeho definici si nemusíme zvlášť pamatovat. Opravdu

$$(a + b\,\mathrm{i}) \cdot (c + d\,\mathrm{i}) = ac + cb\mathrm{i} + ad\mathrm{i} + bd\mathrm{i}^2 = (a\,c - b\,d) + (a\,d + b\,c)\,\mathrm{i}\ .$$

Ze vztahu pro násobení dvou komplexních čísel také plyne, že komplexní číslo násobíme reálným číslem tak, že vynásobíme tímto číslem jeho reálnou i imaginární část.

Dříve než si ukážeme, jak určit podíl dvou komplexních čísel, zaveďme ještě následující pojmy:

Nechť $z = a + b\,\mathrm{i}$ je komplexní číslo. Pak

$-z = -a - b\,\mathrm{i}$ nazýváme **opačným číslem** k číslu z,

$\bar{z} = a - b\,\mathrm{i}$ nazýváme **komplexně sdruženým číslem** k číslu z,

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ nazýváme **absolutní hodnotou komplexního čísla** z.

Komplexní číslo, jehož absolutní hodnota je rovna 1, nazýváme komplexní jednotkou. Imaginární jednotka i je tedy komplexní jednotkou.

Podíl dvou komplexních čísel (zapsaný ve tvaru zlomku) získáme tak, že čitatele i jmenovatele vynásobíme číslem komplexně sdruženým k jmenovateli. Ve jmenovateli pak zůstane pouze reálné číslo, čímž dělení převedeme na násobení převrácenou hodnotou reálného čísla.

Jsou-li tedy $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 = a + b\,\mathrm{i}$, $z_2 = c + d\,\mathrm{i} \neq 0$, pak

$$\frac{a + b\,\mathrm{i}}{c + d\,\mathrm{i}} = \frac{(a + b\,\mathrm{i}) \cdot (c - d\,\mathrm{i})}{(c + d\,\mathrm{i}) \cdot (c - d\,\mathrm{i})} = \frac{(a\,c + b\,d) + (b\,c - a\,d)\mathrm{i}}{c^2 + d^2} = \left(\frac{a\,c + b\,d}{c^2 + d^2}\right) + \left(\frac{b\,c - a\,d}{c^2 + d^2}\right)\mathrm{i}\,.$$

Uveďme ještě, že pro sčítání a násobení komplexních čísel platí stejné zákony jako pro sčítání a násobení čísel reálných, tedy zákony komutativní, asociativní a distributivní.

Je užitečné si zapamatovat jak vypadají mocniny imaginární jednotky i. Platí:

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}^0 &= 1\\
\mathrm{i}^1 &= \mathrm{i}\\
\mathrm{i}^2 &= -1\\
\mathrm{i}^3 &= \mathrm{i}^2\cdot\mathrm{i} = (-1)\cdot\mathrm{i} = -\mathrm{i}\\
\mathrm{i}^4 &= \mathrm{i}^2\cdot\mathrm{i}^2 = (-1)\cdot(-1) = 1\\
\mathrm{i}^5 &= \mathrm{i}^4\cdot\mathrm{i} = 1\cdot\mathrm{i} = \mathrm{i}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Příklad 6.1: Pro komplexní čísla $z_1 = 2-3\mathrm{i}$ a $z_2 = 3+4\mathrm{i}$ vypočtěme komplexní čísla $z_1\cdot z_2$ a $\dfrac{z_1}{z_2}$.

$$z_1\cdot z_2 = (2-3\mathrm{i})\cdot(3+4\mathrm{i}) = 6+8\mathrm{i}-9\mathrm{i}-12(\mathrm{i})^2 = 6-\mathrm{i}-12(-1) = 18-\mathrm{i}\,,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(2-3\mathrm{i})}{(3+4\mathrm{i})} = \frac{(2-3\mathrm{i})\cdot(3-4\mathrm{i})}{(3+4\mathrm{i})\cdot(3-4\mathrm{i})} = \frac{6-8\mathrm{i}-9\mathrm{i}+12(\mathrm{i})^2}{9-16(\mathrm{i})^2} = \frac{-6-17\mathrm{i}}{25} =$$
$$= -\frac{6}{25}-\frac{17}{25}\mathrm{i}\,.$$

☺

Příklad 6.2: Pro komplexní čísla $z_1 = 1-2\mathrm{i}$, $z_2 = 2+\mathrm{i}$ a $z_3 = 2-\mathrm{i}$ vypočtěme komplexní číslo $z = \dfrac{(2\,z_1+3\,z_2)}{z_3}$.

$$z = \frac{2(1-2\mathrm{i})+3(2+\mathrm{i})}{2-\mathrm{i}} = \frac{2-4\mathrm{i}+6+3\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}} = \frac{8-\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}} = \frac{(8-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{4-\mathrm{i}^2} =$$
$$= \frac{16+8\mathrm{i}-2\mathrm{i}-\mathrm{i}^2}{5} = \frac{17+6\mathrm{i}}{5} = \frac{17}{5}+\frac{6}{5}\mathrm{i}\,.$$

☺

Příklad 6.3: Vypočtěme absolutní hodnotu komplexního čísla $\left|\dfrac{1+\mathrm{i}}{3-3\mathrm{i}}\right|$.

Pro absolutní hodnotu komplexních čísel platí: $|z_1\cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$ a $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$.
Platí tedy:

$$\left|\frac{1+\mathrm{i}}{3-3\mathrm{i}}\right| = \frac{|1+\mathrm{i}|}{|3-3\mathrm{i}|} = \frac{\sqrt{1+1}}{\sqrt{9+9}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{3}\,.$$

☺

Cvičení

Cvičení 6.1: Vypočtěte (převeďte na algebraický tvar):

a) $3(5-4\mathrm{i})$, **b)** $\dfrac{(3+\mathrm{i})}{2}$, **c)** $(7-3\mathrm{i})+(-5+4\mathrm{i})$,

d) $(5+2\mathrm{i})-(3+4\mathrm{i})$, **e)** $(1-3\mathrm{i})\cdot(3+4\mathrm{i})$, **f)** $(-5+4\mathrm{i})^2$.

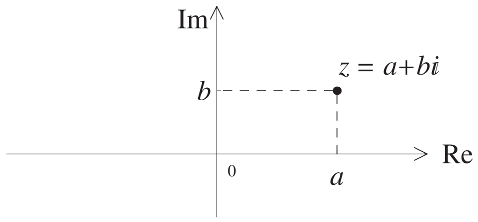
Cvičení 6.2: Vypočtěte (převeďte na algebraický tvar):

a) $\dfrac{3-\mathrm{i}}{2+5\mathrm{i}}$, **b)** $\dfrac{3+\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}}$, **c)** $\dfrac{5+2\mathrm{i}}{4+2\mathrm{i}}$.

d) $\dfrac{2+\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}-\dfrac{2-3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$, **e)** $\left|\dfrac{3+\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}\right|$, **f)** $|(5-2\mathrm{i})\cdot(-3+\mathrm{i})|$.

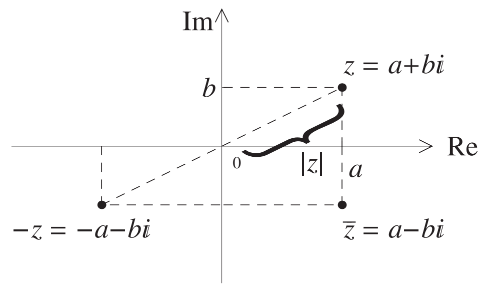
6.2 Geometrické znázornění komplexního čísla

Ztotožníme-li komplexní číslo $z = a + b\,\mathrm{i}$ s dvojicí (a, b), můžeme zobrazit toto komplexní číslo do roviny. Tuto rovinu nazýváme **Gaussovou rovinou**. V této rovině zavedeme počátek, který je obrazem komplexního čísla $0 + 0\,\mathrm{i}$ a dvojici kolmých os, které nazýváme reálná a imaginární osa Gaussovy roviny. Obrazem komplexního čísla $a + b\,\mathrm{i}$ je v Gaussově rovině bod o souřadnicích (a, b), viz Obr. 6.1. (Fakticky zde není žádný rozdíl oproti kartézským souřadnicím. Pouze při znázornění komplexních čísel označujeme reálnou osu Re a imaginární osu Im, oproti osám x a y v kartézských souřadnicích.)



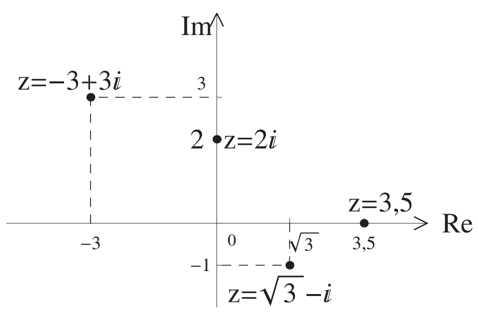
Obrázek 6.1: Gaussova rovina

Uvedené zobrazení je jednoznačné, tzn. každému komplexnímu číslu je přiřazen jediný bod Gaussovy roviny a obráceně, každý bod Gaussovy roviny je obrazem jediného komplexního čísla. Obrazy čísel opačných jsou souměrné podle počátku, obrazy komplexně sdružených čísel jsou souměrné podle reálné osy. V Gaussově rovině představuje absolutní hodnota $|z|$ vzdálenost obrazu komplexního čísla $z = a + b\mathrm{i}$ od počátku, tj. absolutní hodnota je vzdálenost bodu (a, b) od počátku $(0, 0)$. Vše je zobrazeno na Obr. 6.2.



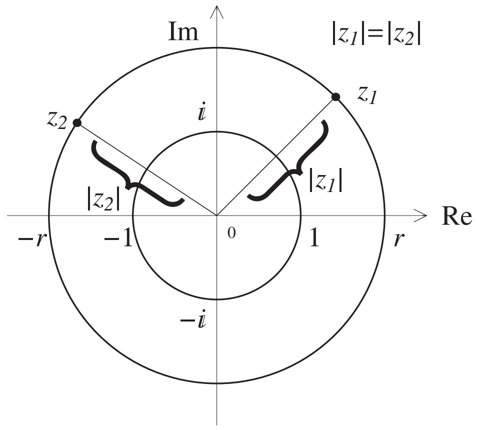
Obrázek 6.2: Zobrazení komplexních čísel z, $-z$, $\bar{z}$, $|z|$ do Gaussovy roviny

Příklad 6.4: V Gaussově rovině zobrazme komplexní čísla:
$z = -3 + 3\,\mathrm{i}$, $z = 2\,\mathrm{i}$, $z = \sqrt{3} - \mathrm{i}$, $z = 3,5$. ☺



Obrázek 6.3: Zobrazení komplexních čísel do Gaussovy roviny. Příklad 6.4.

Obrazy komplexních čísel se stejnou absolutní hodnotou leží na soustředných kružnicích se středy v počátku a s poloměry rovnými příslušným absolutním hodnotám. Na Obr. 6.4 jsou znázorněna komplexní čísla z_1, z_2, pro která platí, že $|z_1| = |z_2| = r$, obě leží na kružnici se středem v počátku a poloměrem r. Podobně komplexní jednotky i, $-\mathrm{i}$ leží na jednotkové kružnici.

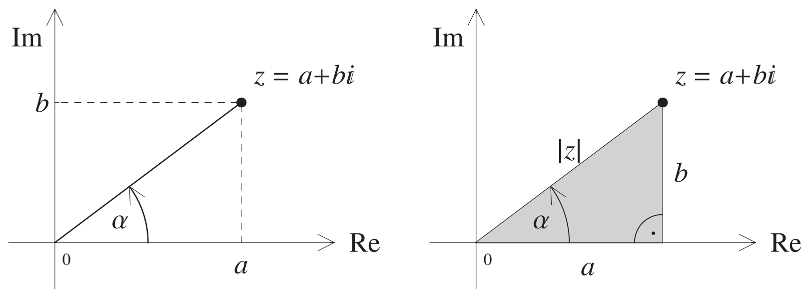


Obrázek 6.4: Zobrazení komplexních čísel se stejnou absolutní hodnotou.

6.3 Goniometrický tvar komplexního čísla

Uvažujme komplexní číslo $z = a + b\,\mathrm{i} \neq 0$. **Argumentem** tohoto komplexního čísla rozumíme orientovaný úhel $\omega = \alpha + 2k\pi$, kde $\alpha \in \langle 0, 2\pi)$ a $k \in \mathbb{Z}$, viz Obr. 6.5a. Úhel α nazýváme **základní argument** komplexního čísla.

a) b)



Obrázek 6.5: Zobrazení argumentu komplexního čísla.

Z Obr. 6.5b můžeme získat vztahy mezi složkami a, b komplexního čísla z a jeho argumentem α a absolutní hodnotou $|z|$.

$$\cos\alpha = \frac{a}{|z|}, \qquad \sin\alpha = \frac{b}{|z|}.$$

Odtud dostáváme

$$z = a + b\,\mathrm{i} = |z|\left(\frac{a}{|z|} + \frac{b}{|z|}\mathrm{i}\right) = |z|\,(\cos\alpha + \mathrm{i}\,\sin\alpha).$$

Vyjádření komplexního čísla z ve tvaru $z = |z|(\cos\alpha + \mathrm{i}\ \sin\alpha)$ nazýváme **goniometrický tvar komplexního čísla**.

Poznamenejme ještě, že komplexní číslo $z = (\cos\alpha + \mathrm{i}\ \sin\alpha)$ je komplexní jednotka, protože

$$|z| = \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = 1$$

Příklad 6.5: Komplexní číslo $z = \sqrt{3} + \mathrm{i}$ vyjádřeme v goniometrickém tvaru.

$|z| = \sqrt{3+1} = 2$

$$\left.\begin{array}{lll} \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \Rightarrow \quad \alpha = \dfrac{\pi}{6} & \text{nebo} \quad \dfrac{11\pi}{6} \\ \sin\alpha = \dfrac{1}{2} & \Rightarrow \quad \alpha = \dfrac{\pi}{6} & \text{nebo} \quad \dfrac{5\pi}{6} \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$$

$z = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + \mathrm{i}\ \sin\dfrac{\pi}{6}\right).$ ☺

Příklad 6.6: Komplexní číslo $z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\ \sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$ vyjádřeme v algebraickém tvaru.

$z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\ \sin\dfrac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1 + \mathrm{i}\ .$ ☺

Jak uvidíme dále, může být goniometrický tvar komplexního čísla výhodný při násobení, umocňování a odmocňování komplexních čísel.

6.3.1 Moivreova věta

Ukažte si sami, že pro součin dvou komplexních jednotek platí:

$$(\cos\alpha + \mathrm{i}\ \sin\alpha)\cdot(\cos\beta + \mathrm{i}\ \sin\beta) \ = \ \cos(\alpha+\beta) + \mathrm{i}\ \sin(\alpha+\beta).$$

Odtud dostáváme:

1. Pro $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$(|z|(\cos\alpha + \mathrm{i}\ \sin\alpha))^n \ = \ |z|^n(\cos n\alpha + \mathrm{i}\ \sin n\alpha). \qquad \text{(Moivreova věta)}$$

2. Pro $z_1 = |z_1|(\cos\alpha + \mathrm{i}\ \sin\alpha)$ a $z_2 = |z_2|(\cos\beta + \mathrm{i}\ \sin\beta)$ platí:

$$z_1\cdot z_2 \ = \ |z_1\cdot z_2|(\cos(\alpha+\beta) + \mathrm{i}\ \sin(\alpha+\beta)).$$

Příklad 6.7: Proveďme součin $(1+\mathrm{i}\,)(1-\sqrt{3}\mathrm{i}\,)$.

Příklad můžeme řešit dvojím způsobem:
a) Obě čísla vezmeme v algebraickém tvaru a vynásobíme:

$$(1+\mathrm{i})(1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}) \;=\; 1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}+\mathrm{i}+\sqrt{3} \;=\; (1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})\,\mathrm{i}\,.$$

b) Obě čísla vezmeme v goniometrickém tvaru:

$$\begin{aligned}(1+\mathrm{i})(1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}) \;&=\; \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\,\sin\frac{\pi}{4}\right)\cdot 2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+\mathrm{i}\,\sin\frac{5\pi}{3}\right)\\ &=\; 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{23\pi}{12}+\mathrm{i}\,\sin\frac{23\pi}{12}\right).\end{aligned}$$

☺

Druhý způsob se zdá být poněkud komplikovaný, ale při počítání vyšších mocnin komplexního čísla může být docela výhodný.

Příklad 6.8: Umocněme $\left(\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)^6$.

Nejprve převedeme komplexní číslo do goniometrického tvaru:

$$\sqrt{3}-\mathrm{i} \;=\; 2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+\mathrm{i}\,\sin\frac{11\pi}{6}\right).$$

Nyní komplexní číslo umocníme:

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)^6 \;&=\; 2^6\left(\cos\frac{11\pi}{6}+\mathrm{i}\,\sin\frac{11\pi}{6}\right)^6 \;=\; 64\,(\cos 11\pi+\mathrm{i}\,\sin 11\pi) \;=\\ &=\; 64\,(\cos\pi+\mathrm{i}\,\sin\pi) \;=\; 64(-1+0\,\mathrm{i}) \;=\; -64\,.\end{aligned}$$

☺

6.3.2 Odmocnina z komplexního čísla

Mějme dáno komplexní číslo $z = |z|(\cos\alpha+\mathrm{i}\,\sin\alpha)$, $\alpha\in\langle 0,2\pi)$. Pro $n\in\mathbb{N}$ označme $u=\sqrt[n]{z}$ komplexní číslo, pro které platí $u^n = z$, a zapišme jej v goniometrickém tvaru

$$\sqrt[n]{z} \;=\; u \;=\; |u|(\cos\varphi+\mathrm{i}\,\sin\varphi).$$

Umocněním dostáváme:

$$z \;=\; u^n \;=\; |u|^n(\cos\varphi+\mathrm{i}\,\sin\varphi)^n \;=\; |u|^n(\cos n\varphi+\mathrm{i}\,\sin n\varphi).$$

Odtud

1. $|u|^n \;=\; |z| \quad\Rightarrow\quad |u| = \sqrt[n]{|z|}$
2. $\left.\begin{array}{rcl}\cos\alpha &=& \cos n\,\varphi\\ \sin\alpha &=& \sin n\,\varphi\end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad n\,\varphi \;=\; \alpha+2k\pi \quad\Rightarrow\quad \varphi \;=\; \dfrac{\alpha+2k\pi}{n},\quad$ kde $k\in\mathbb{Z}$.

Pokud chceme získat $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$, volíme po řadě $k = 0, 1, 2 \ldots (n-1)$. Takto získáme n různých $n-$tých odmocnin z komplexního čísla z, které mají tvar:

$$z_k \;=\; \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + \mathrm{i}\,\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right),\; k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1).$$

Snadno se dá ukázat, že všechny tyto odmocniny tvoří (v Gaussově rovině) vrcholy pravidelného n-úhelníka se středem v počátku. Volbou dalších hodnot $k \in \mathbb{Z}$ již jiné odmocniny nezískáme.

Příklad 6.9: Určeme všechny odmocniny $\sqrt[3]{-4\sqrt{2}+4\sqrt{2}\,\mathrm{i}}$.

Nejprve převedeme komplexní číslo $-4\sqrt{2}+4\sqrt{2}\,\mathrm{i}$ do goniometrického tvaru:

$$-4\sqrt{2}+4\sqrt{2}\,\mathrm{i} \;=\; 8\left(\cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\,\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

Nyní komplexní číslo „odmocníme“ - získáme tři různé hodnoty pro $k = 0, 1, 2$:

$$\begin{aligned}
z_0 &= 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\,\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}+\sqrt{2}\,\mathrm{i}\,,\\
z_1 &= 2\left(\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}) + \mathrm{i}\,\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3})\right) = 2\left(\cos\frac{11\pi}{12} + \mathrm{i}\,\sin\frac{11\pi}{12}\right),\\
z_2 &= 2\left(\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}) + \mathrm{i}\,\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3})\right) = 2\left(\cos\frac{19\pi}{12} + \mathrm{i}\,\sin\frac{19\pi}{12}\right).
\end{aligned}$$

☺

Cvičení

Cvičení 6.3: Komplexní číslo z vyjádřete v goniometrickém tvaru:

a) $z = \sqrt{2}+\sqrt{2}\,\mathrm{i}$, **b)** $z = 1-\mathrm{i}$, **c)** $z = 2+2\,\mathrm{i}$,

d) $z = \sqrt{3}+\mathrm{i}$, **e)** $z = 3-3\sqrt{3}\,\mathrm{i}$, **f)** $z = -5\mathrm{i}$.

Cvičení 6.4: Komplexní číslo vyjádřete v algebraickém tvaru:

a) $2\left(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\,\sin\frac{\pi}{2}\right)$, **b)** $-3\left(\cos\frac{5\pi}{6} + \mathrm{i}\,\sin\frac{5\pi}{6}\right)$, **c)** $-\left(\cos\frac{9\pi}{4} + \mathrm{i}\,\sin\frac{9\pi}{4}\right)$,

d) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\,\sin\frac{3\pi}{4}\right)$, **e)** $\sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + \mathrm{i}\,\sin\frac{5\pi}{3}\right)$, **f)** $(\cos 8\pi + \mathrm{i}\,\sin 8\pi)$.

Cvičení 6.5: Vynásobte nebo umocněte komplexní čísla, výsledek vyjádřete v algebraickém tvaru:

a) $(\sqrt{2}+\sqrt{2}\,\mathrm{i})\left(\cos\frac{3\pi}{2} + \mathrm{i}\;\sin\frac{3\pi}{2}\right)$, **b)** $\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{3} + \mathrm{i}\;\sin\frac{7\pi}{3}\right)\right)^8$,

c) $\left(\cos\frac{3\pi}{5} + \mathrm{i}\;\sin\frac{3\pi}{5}\right)\left(\cos\frac{2\pi}{5} + \mathrm{i}\;\sin\frac{2\pi}{5}\right)$, **d)** $(-3-3\sqrt{3}\,\mathrm{i})^5$,

Cvičení 6.6: Najděte všechny odmocniny:

a) $\sqrt[3]{8+8\,\mathrm{i}}$, **b)** $\sqrt[5]{-32}$, **c)** $\sqrt{-2-2\,\mathrm{i}}$,

d) $\sqrt[6]{-1}$, **e)** $\sqrt[3]{-16\mathrm{i}}$, **f)** $\sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}\,\mathrm{i}}$.

Výsledky cvičení

1 Úpravy algebraických výrazů

1.1 **a)** $\frac{2\,a}{3}$, **b)** $\frac{1-x}{y}$, **c)** $\frac{a^3}{c}$, **d)** $\frac{2\,y}{x\,z}$.

e) $u^5\,v\,w$, **f)** $a\,b^8$, **g)** $x^{-\frac{1}{3}}$, **h)** $x^{\frac{1}{5}}\,y^{-\frac{1}{2}}$.

1.2 **a)** $\sqrt[6]{a^{-7}}$, **b)** $\sqrt[4]{x^{11}}$, **c)** $\sqrt[5]{u^3}$, **d)** $\sqrt[3]{x}$.

1.3 **a)** $P(x):Q(x) = x^2 - 3x + 4$,

b) $P(x):Q(x) = x^2 + x - 3$,

c) $P(x):Q(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 + 4x - 5$,

d) $P(x):Q(x) = x^3 + 2x + 1 - \dfrac{2}{x+3}$,

e) $P(x):Q(x) = x^4 - 3x^2 - 5x - 2 + \dfrac{11x+5}{x^2-3x+3}$,

f) $P(x):Q(x) = x^4 - 4x^2 + 9x - 7 + \dfrac{8x-1}{x^2+x}$,

g) $P(x):Q(x) = x^4 + x^3 + x^2 - x + 1 + \dfrac{x-3}{x^3+2x^2-2x+1}$.

1.4 **a)** $a^3 + 6a^2 + 12a + 8$, **b)** $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$,

c) $8b^3 + 12b^2 + 6b + 1$, **d)** $25x^2 + 20x + 4$,

e) $16y^4 - 32y^3 + 24y^2 - 8y + 1$, **f)** $32a^5 + 40a^4 + 20a^3 + 5a^2 + \frac{5}{8}a + \frac{1}{32}$.

1.5 **a)** $(x-2)(x+2)$, **b)** $(x+2)\left(x^2-2x+4\right)$,

c) $(a-3)\left(a^2+3a+9\right)$, **d)** $\frac{1}{4}(a-8b)(a+8b)$,

e) $\frac{1}{64}(2x-y)\left(4x^2+2xy+y^2\right)$, **f)** $\left(x^2-y\right)\left(x^2+y\right)$,

g) $(a-b)(a+b)\left(a^2+b^2\right)$, **h)** $(x+y)\left(x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4\right)$,

i) $2y\left(3x^2+y^2\right)$, **j)** $5(2x+1)$,

k) $a\left(a^2+3ab+3b^2\right)$, **l)** $-24(x+1)\left(x^2+2x+10\right)$.

1.6 **a)** $(x-5)(x+1)$, **b)** $(x-2)(x-3)$, **c)** $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)$,

d) $(2x-1)(3x+1)$, **e)** $(x^2+1)(x^2+1)$, **f)** $(x^3-1)(x^3+2)$.

1.7 **a)** $(a-1)^2+1\,,$ **b)** $(x+2)^2+1\,,$ **c)** $\left(u+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}\,,$

d) $2((x-1)^2+2)\,,$ **e)** $3\left(\left(b+\frac{1}{6}\right)^2+\frac{35}{36}\right)\,,$ **f)** $(x^2-1)^2+1\,.$

1.8 **a)** $\frac{5x^4y^4}{11z^3}\,;\quad x,y,z\neq 0\,,$ **b)** $\frac{x^2+xy+y^2}{x+y}\,;\quad x\neq\pm y\,,$

c) $\frac{u+v}{u-v}\,;\quad u\neq v, x\neq y\,,$ **d)** $\frac{a^2+2a+4}{a+2}\,;\quad a\neq\pm 2\,,$

e) $2\,x\,;\quad y\neq -1\,,$ **f)** $-1\,;\quad a\neq 0, (c-b-a\,d)\neq 0\,.$

1.9 **a)** $\frac{x+y}{x-y}\,;\quad x,y\neq 0,\, x\neq y\,,$ **b)** $\frac{1-x}{x}\,;\quad x>0\,,$

c) $\sqrt{a}\,;\quad a>0\,,$ **d)** $\sqrt{x}+1\,;\quad x\geq 0,\, x\neq 1\,,$

e) $(\sqrt{u}-\sqrt{v})\,(u-v)\,;$
$u\geq 0,\, v\geq 0,\, u+v>0\,,$ **f)** $(\sqrt{x}+1)^2\,;\quad x\neq 1,\, x\geq 0\,.$

1.10 **a)** $\frac{x^2+x+1}{x(x+1)}\,;\quad x\neq -1,\, x\neq 0\,,$ **b)** $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\,;\quad a\neq\pm b\,,$

c) $\frac{1}{u}\,;\quad u\neq 0,\, u\neq v\,,$ **d)** $\frac{(a-b)^2}{a^2b^2}\,;\quad a,b\neq 0\,,$

e) $\frac{x^2+4y^2}{x^2-4y^2}\,;\quad x\neq\pm 2\,y\,,$ **f)** $\frac{p(2p+1)}{2p-1}\,;\quad p\neq\frac{1}{2}\,.$

1.11 **a)** $1\,;\quad x\neq\pm y\,,$ **b)** $a\,;\quad a\neq -1\,,$

c) $\frac{u}{u-1}\,;\quad u\neq 0,\, u\neq\pm 1\,,$ **d)** $\frac{1}{t}+1\,;\quad t\neq 0,\, t\neq 1\,,$

e) $-\frac{y}{x}\,;\quad x\neq 0,\, x\neq\pm y\,,$ **f)** $\frac{(x-y)^3}{2x}\,;\quad x\neq 0,\, x\neq\pm y\,.$

1.12 **a)** $\frac{3}{\sqrt{2}}\,,$ **b)** $\sqrt[4]{6}\,,$ **c)** $-\frac{9}{4}\,,$

d) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\,,$ **e)** $\sqrt[6]{\frac{2}{3}}\,,$ **f)** $5\,\sqrt{5}\,.$

1.13 **a)** $\dfrac{1}{|x+2|}$; $x \neq -2$, **b)** $\dfrac{|x-y|}{|x+y|}$; $x \neq -y$,

c) $\dfrac{2ab}{b^2-a^2}$; $a \neq \pm b,\ a, b \neq 0$, **d)** $\dfrac{1}{a}$; $a \neq b,\ a, b \neq 0$,

e) $\dfrac{2(u+1)}{u-1}$; $u \geq 0,\ u \neq 1$, **f)** $x-1$; $x > 0$,

g) $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$; $a > 0$, **h)** $\sqrt{x}\,|x-1|$; $x \geq 0$,

i) $-x^3 y$; $x \neq 2\,y,\ x, y \neq 0$, **j)** $\dfrac{2(1+u)}{1-u}$; $u > 0,\ u \neq 1$,

k) $\sqrt{2}$; $a < 0 \vee a > 1$, **l)** $y\,(x-y)$; $x, y \neq 0$,

m) $\dfrac{3}{a}$; $a \neq 0,\ a \neq 3$, **n)** $\dfrac{u}{v-u}$; $v \neq u,\ u, v \neq 0$,

o) $\dfrac{x+y}{\sqrt{x}\sqrt{y}}$; $x > 0,\ y > 0$, **p)** $-\dfrac{x+y}{x^2 y^2}$; $x \neq y,\ x, y \neq 0$,

q) $-\dfrac{a^2+x^2}{ax}$; $x \neq \pm a,\ a, x \neq 0$, **r)** $\sqrt[3]{x}-1$; $x > 0$,

t) $\dfrac{x-3}{x(x+1)}$; $x \neq 0, -1, -5$, **u)** $\dfrac{6x}{x-2}$; $x \neq \pm 2,\ x \neq \pm 3$,

v) $\sqrt{x+1}+\sqrt{2}$; $x \geq -1,\ x \neq 1$, **w)** $\dfrac{1}{v^2}$; $u, v \neq 0,\ u \neq \pm v$,

x) $y^2 - x^2$; $x, y \neq 0$, **y)** $\sqrt{x}$; $x > 0$.

1.14 **a)** $x^3 - 5x^2 + x - 1$; $x \neq 1$, **b)** $x^3 + x^2 + x - 2 + \dfrac{1}{x+1}$; $x \neq -1$,

c) $x^3 + 2x^2 + x - 3$; $x \neq \pm 2$, **d)** $2x^3 + x - 3 + \dfrac{x+1}{x(x-1)}$; $x \neq 0,\ x \neq 1$,

e) $x^3 - x^2 + x - 1$; $x \neq 1,\ x \neq -2$, **f)** $x + \dfrac{x-1}{(x-2)\,(x^2-3)}$; $x \neq \pm\sqrt{3},\ x \neq 2$

2 Řešení rovnic

2.1 **a)** $K = \{1\}$, **b)** $K = \{6\}$, **c)** $K = \mathbb{R}$, **d)** $K = \emptyset$,
e) $K = \{-\frac{3}{11}\}$, **f)** $K = \{-\frac{4}{17}\}$, **g)** $K = \{-1\}$, **h)** $K = \{0\}$,
i) $K = \{-32\}$, **j)** $K = \{-\frac{267}{2}\}$, **k)** $K = \{\frac{28}{3}\}$.

2.2 **a)** $K = \{-4, 7\}$, **b)** $K = \{\pm\frac{1}{5}\}$, **c)** $K = \{\frac{3}{2}, 2\}$,
d) $K = \{\frac{1}{7}\}$, **e)** $K = \emptyset$, **f)** $K = \{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\}$,
g) $K = \{0, \frac{1}{6}\}$, **h)** $K = \emptyset$, **i)** $K = \{\pm 14\}$.

2.3 **a)** $K = \{\frac{5}{3}, 4\}$, **b)** $K = \{3, 4\}$, **c)** $K = \emptyset$,
d) $K = \emptyset$, **e)** $K = \mathbb{R}$, **f)** $K = \{1, 2\}$.

2.4 **a)** $K = \{\frac{1}{4}(\sqrt{3} \pm \mathrm{i}\sqrt{37})\}$, **b)** $K = \{-4, 8\}$,
c) $K = \{-2, 4\}$, **d)** $K = \{\frac{1}{8}[2(1+\sqrt{3}) \pm \sqrt{16 - 8\sqrt{3}}]\} =$
$= \{\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\}$,
e) $K = \{3 \pm \mathrm{i}\}$, **f)** $K = \{\frac{1}{2}(\sqrt{2} \pm \sqrt{6})\}$,
g) $K = \{5 \pm 2\mathrm{i}\}$, **h)** $K = \{\frac{1}{4}(1 \pm \sqrt{3}\mathrm{i})\}$.

2.5 **a)** $K = \{p - 5; p \in \mathbb{R}\}$, **b)** $K = \{-p - 4; p \in \mathbb{R}\}$,

c) pro $p = 1$ je $K = \emptyset$, pro $p \neq 1$ je $K = \left\{\dfrac{5 - 2p}{2(p-1)}\right\}$,

d) pro $p = -1$ je $K = \emptyset$, pro $p \neq -1$ je $K = \left\{\dfrac{6 - 6p - p^2}{p+1}\right\}$,

e) pro $p = 4$ je $K = \{2\}$, pro $p = -4$ je $K = \{-2\}$,

pro $p \in (-4; 4)$ je $K = \emptyset$, pro $|p| > 4$ je $K = \left\{\dfrac{p \pm \sqrt{p^2 - 16}}{2}\right\}$,

f) pro $p = 0$ je $K = \emptyset$, pro $p \neq 0$ je $K = \left\{\dfrac{3 \pm 2\sqrt{2}}{p}\right\}$,

g) pro $p = \frac{5}{2}$ je $K = \emptyset$, pro $p = 0$ je $K = \emptyset$,

pro $p \neq 0, p \neq \frac{5}{2}$ je $K = \left\{\dfrac{2p+5}{2p-5}\right\}$,

h) pro $p \in \langle 0; 2\rangle$ je $K = \emptyset$,

pro $p \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$ je $K = \left\{\frac{1}{2}(p \pm \sqrt{p(p-2)})\right\}$.

2.6 **a)** $K = \{\pm 4\}$, **b)** $K = \{\pm\sqrt{\frac{3}{2}}, \pm\sqrt{2}\}$,
c) $K = \emptyset$, **d)** $K = \{\pm 1\}$,
e) $K = \{\sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{6}\}$, **f)** $K = \{\sqrt[3]{-14}, \sqrt[3]{2}\}$.

2.7 **a)** $K = \{-3, -2, 3\}$, **b)** $K = \{0, -1, 2\}$,
c) $K = \{-4, -1, 2\}$, **d)** $K = \{\frac{7}{2}, \pm\mathrm{i}\}$,
e) $K = \{0, 2, \pm 2\mathrm{i}\}$, **f)** $K = \{1, \pm\sqrt{3}\mathrm{i}\}$.

2.8 **a)** $K = \{\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, 2\}$, **b)** $K = \{-3, 1, -\frac{2}{3}\}$, **c)** $K = \{1, 2 \pm \sqrt{3}\}$,
d) $K = \{-2, -3, -4\}$, **e)** $K = \{2, 4, 5\}$, **f)** $K = \{\frac{3}{2}, \pm 3\}$.

2.9 **a)** $K = \{8\}$, **b)** $K = \{6, 7\}$, **c)** $K = \{-4\}$,
d) $K = \{3\}$, **e)** $K = \{0, 1, 4\}$, **f)** $K = \{6\}$,
g) $K = \emptyset$, **h)** $K = \{-6\}$, **i)** $K = \{-3, 7\}$,
j) $K = \{\pm\sqrt{5}\}$.

2.10 **a)** $K = \{1\}$, **b)** $K = \{\frac{4}{3}\}$, **c)** $K = \{1\}$,
d) $K = \{0\}$, **e)** $K = \{\log_8 15\}$, **f)** $K = \{1 + \log_2 3\}$,
g) $K = \{\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\log_{0,5} 7\}$, **h)** $K = \{1000\}$, **i)** $K = \{127\}$,
j) $K = \{-\frac{3}{8}\}$, **k)** $K = \{\mathrm{e}^8\}$, **l)** $K = \{10\}$.

2.11 **a)** $K = \mathbb{R}$ **b)** $K = \{1, \log_3 4\}$ **c)** $K = \{10, 100\}$
d) $K = \{\frac{1}{2}\log_3 \frac{3}{13}\}$ **e)** $K = \{2, 3\}$ **f)** $K = \{0\}$
g) $K = \{3\}$, **h)** $K = \{3\}$, **i)** $K = \{5\}$,
j) $K = \{5 \pm \sqrt{5}\}$, **k)** $K = \{-4\}$, **l)** $K = \{3, 5\}$.

2.12 **a)** $K = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \{\frac{4}{3}\pi + 2k\pi, \frac{5}{3}\pi + 2k\pi\}$, **b)** $K = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \{\frac{5}{6}\pi + k\pi\}$,
c) $K = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\}$, **d)** $K = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \{\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{7}{4}\pi + 2k\pi\}$,
e) $K = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \{\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\}$, **f)** $K = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \{2\pi + 4k\pi\}$,
g) $K = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \{\frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{2}\}$, **h)** $K = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \{-\frac{\pi}{4} + k\pi\}$,
i) $K = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \{k\pi\}$, **j)** $K = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \{k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\}$,
k) $K = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \{-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\}$, **l)** $K = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\}$.

2.13 **a)** $K = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\}$,

b) $K = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\}$,

c) $K = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\}$, **d)** $K = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{\frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + k\pi\}$,

e) $K = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5}{3}\pi + 2k\pi\}$, **f)** $K = \emptyset$,

g) $K = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{k\pi, \frac{2}{3}\pi + k\pi\}$, **h)** $K = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi\}$.

2.14 **a)** $K = \{2, 12\}$, **b)** $K = \emptyset$, **c)** $K = \{-2, 4\}$,
d) $K = (-\infty; \frac{4}{3}\rangle$, **e)** $K = (-\infty; \frac{1}{2}\rangle$, **f)** $K = \{-4\}$.

2.15 **a)** $K = (-\infty; 0\rangle$, **b)** $K = (-\infty; 1\rangle \cup \{2\}$, **c)** $K = \{0\}$,
d) $K = \{\frac{1}{2}, \frac{13}{6}\}$, **e)** $K = \{-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\}$, **f)** $K = \emptyset$
g) $K = \{-5, -\frac{1}{2}\}$, **h)** $K = (-\infty; 1\rangle$, **i)** $K = \{a \pm 3\}$, $a \in \mathbb{R}$,
j) $b < 0 \Rightarrow K = \emptyset$, $b = 0 \Rightarrow K = \{2\}$, $b > 0 \Rightarrow K = \{2 \pm b\}$.

2.16 **a)** $K = \{-1, 7\}$, **b)** $K = \emptyset$
c) $K = (-\infty; 0\rangle$, **d)** $K = \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$.

Ve cvičeních 2.17 až 2.20 jsou výsledky zapsány jako množiny uspořádaných dvojic, resp. trojic, tedy např. $K = \{(2, 3)\}$ znamená $x = 2$, $y = 3$, podobně $K = \{(1, 4, 6)\}$ znamená $x = 1$, $y = 4$, $z = 6$.

2.17 **a)** $K = \{(1 + 2y, y); y \in \mathbb{R}\}$, **b)** $K = \{(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})\}$,
c) $K = \{(1, 5)\}$ **d)** $K = \emptyset$,
e) $K = \{(-3, 1)\}$, **f)** $K = \{(x, \frac{4}{3}x - 2); x \in \mathbb{R}\}$.

2.18 **a)** $K = \{(5, 4)\}$, **b)** $K = \{(\frac{31}{10}, \frac{17}{10})\}$,
c) $K = \{(4, -2)\}$, **d)** $K = \{(\sqrt{3}, \sqrt{2})\}$,
e) $K = \{(-5, 10, 5)\}$, **f)** $K = \{(2 + z, -1 - 2z, z); z \in \mathbb{R}\}$.

2.19 **a)** $K = \left\{\left(\dfrac{3 + 5t}{2 + t^2}, \dfrac{-10 + 3t}{2 + t^2}\right); t \in \mathbb{R}\right\}$,

b) pro $t = -\frac{1}{2}$ je $K = \emptyset$, pro $t \neq -\frac{1}{2}$ je $K = \left\{\left(\dfrac{4t + 8}{2t + 1}, \dfrac{-12}{2t + 1}\right)\right\}$

2.20 **a)** $K = \left\{\left(2 \pm \frac{2}{3}\sqrt{21}, 1 \pm \frac{1}{3}\sqrt{21}\right)\right\}$, **b)** $K = \{(50, -14)\}$,
c) $K = \{(-3, -4)\}$, **d)** $K = \{(-2, 1), (1, 2)\}$,
e) $K = \{(-3, 0), (-2, -1)\}$, **f)** $K = \{(2, 9), (9, 2)\}$,
g) $K = \emptyset$, **h)** $K = \left\{(x, 1 \pm \sqrt{7 - (x - 3)^2}); x \in \mathbb{R}\right\}$.

3 Řešení nerovnic

3.1 **a)** $K = \mathbb{R}$, **b)** $K = \emptyset$, **c)** $K = (-\infty; \frac{29}{15}\rangle$, **d)** $K = (\frac{14}{5}; \infty)$, **e)** $K = (-\infty; 2)$, **f)** $K = (-\infty; \frac{122}{83}\rangle$, **g)** $K = (-\infty; -\frac{4}{7}\rangle$, **h)** $K = (0,4; \infty)$.

3.2 **a)** $K = (39,5; \infty)$, **b)** $K = (-\frac{5}{7}; \infty)$, **c)** $K = \big(-\infty; \frac{31}{29}\big\rangle$, **d)** $K = (-\infty; \frac{5}{3} - \frac{8}{3\pi}\rangle$, **e)** $K = \left(-\infty; \frac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{\sqrt{7}-\sqrt{2}-1}\right)$, **f)** $K = \langle \frac{18}{7}; \infty)$.

3.3 **a)** $K = \langle 2; 4\rangle$, **b)** $K = \langle -\frac{\pi}{8}; \frac{3}{8}\pi\rangle$, **c)** $K = (\frac{8}{5}; \frac{9}{5})$, **d)** $K = \langle \frac{1}{2}; \frac{5}{3})$, **e)** $K = \emptyset$, **f)** $K = \langle -2; 16\rangle$.

3.4 **a)** $K = (-\infty; \frac{3}{4}\pi\rangle \cup \langle \frac{5}{4}\pi; \infty)$, **b)** $K = \mathbb{R} \setminus \{\frac{4}{3}\}$, **c)** $K = \{2\}$, **d)** $K = (-\infty; -\frac{5}{6}\rangle \cup \langle \frac{3}{2}; \infty)$, **e)** $K = (-\infty; 6\rangle \cup \langle 10; \infty)$, **f)** $K = \emptyset$, **g)** $K = \langle 1; \infty)$, **h)** $\langle -\frac{7}{2}; -\frac{5}{2}\rangle$, **i)** $K = \langle -1; 1\rangle$.

3.5 **a)** $K = (-1; 5)$, **b)** $K = (2; 3) \cup (3; 4)$, **c)** $K = \langle 2; 3) \cup (5; 6\rangle$, **d)** $K = (-3; -2) \cup (0; 1)$, **e)** $K = \langle 0; 5\rangle$, **f)** $K = \langle -2; 2\rangle \cup \langle 6; 8\rangle$.

3.6 **a)** $K = (-\infty; 0\rangle \cup \langle 1; \infty)$ **b)** $K = \langle 0; 1\rangle \cup \langle 2; \infty)$ **c)** $K = (-1; 0) \cup (1; 2)$ **d)** $K = (-\infty; -3\rangle \cup (2; \infty)$ **e)** $K = (-\infty; -1) \cup (0; 1)$ **f)** $K = (-\infty; -2)$ **g)** $K = \langle \frac{1}{2}; 2)$ **h)** $K = (-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$ **i)** $K = \langle -1; 2\rangle$, **j)** $K = (-\infty; -5\rangle \cup (-\sqrt{3}; 0\rangle \cup (\sqrt{3}; \infty)$.

3.7 **a)** $K = (1; \infty)$, **b)** $K = (-\infty; -1\rangle \cup \{0\}$, **c)** $K = (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$, **d)** $K = (0; 1\rangle$, **e)** $K = (-2; 2)$, **f)** $K = (-4; -2\rangle$.

3.8 **a)** $K = (-\infty; -1\rangle \cup \langle 1; \infty)$, **b)** $K = \langle 2; \infty)$, **c)** $K = (-\infty; 1) \cup \langle 3; \infty)$, **d)** $K = (-\infty; -1) \cup (3; \infty)$, **e)** $K = (-\infty; -1\rangle \cup \langle \frac{1}{2}; \infty)$, **f)** $K = (\frac{1}{3}; \frac{1}{2})$.

3.9 **a)** $K = (-\infty; -\frac{1}{2}\rangle \cup \langle 1; \infty)$, **b)** $K = (-\infty; 0) \cup (3; \infty)$,
c) $K = \langle -1; 9 \rangle$, **d)** $K = (-\infty; \frac{1}{3}) \cup (3; \infty)$,
e) $K = (-\infty; -3) \cup (4; \infty)$, **f)** $K = \langle -4; -3 \rangle$,
g) $K = \mathbb{R}$, **h)** $K = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$,
i) $K = \emptyset$, **j)** $K = \mathbb{R}$,
k) $K = \emptyset$, **l)** $K = \{-1\}$.

3.10 **a)** $K = \langle -1; -\frac{\sqrt{2}}{2} \rangle \cup \langle \frac{\sqrt{2}}{2}; 1 \rangle$, **b)** $K = \langle 1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2} \rangle$,
c) $K = (-4; -3) \cup (5; 6)$, **d)** $K = (-3; -2\rangle \cup \langle 0; 3)$,
e) $K = \langle -1; 1 \rangle$, **f)** $K = \langle -9; -8) \cup (6; 9\rangle$.

3.11 **a)** $K = \langle -21; 4 \rangle$, **b)** $K = (-\infty; -3) \cup (3; \infty)$,
c) $K = \langle 16; \infty)$, **d)** $K = \langle -1; 3)$,
e) $K = \langle 3; \frac{7}{2})$, **f)** $K = \langle 0; \infty)$,
g) $K = \langle 2; \infty)$, **h)** $K = \emptyset$.

3.12 **a)** $K = (-\infty; 3\rangle$, **b)** $K = (-\infty; -3\rangle$, **c)** $K = (2; \infty)$,
d) $K = \mathbb{R}$, **e)** $K = \emptyset$, **f)** $K = \emptyset$,
g) $K = (-\infty; \log_3 4)$, **h)** $K = (-\infty; -\log_3 2)$, **i)** $K = \langle \log_7 5 + 1; \infty)$.

3.13 **a)** $K = (1002; \infty)$ **b)** $K = \left(-\frac{1}{2}; \frac{\mathrm{e}-1}{2}\right\rangle$
c) $K = (10; \infty)$ **d)** $K = (-\infty; 0)$
e) $K = (0; \mathrm{e} - 1\rangle$ **f)** $K = \emptyset$.

3.14 **a)** $K = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \langle \frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{5}{3}\pi + 2k\pi \rangle$, **b)** $K = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \{2k\pi\}$,
c) $K = \mathbb{R}$, **d)** $K = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi\right)$,
e) $K = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left\langle -\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi \right\rangle$, **f)** $K = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} (k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$,
g) $K = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left\langle -\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$, **h)** $K = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{2} + k\pi; \pi + k\pi\right)$,
i) $K = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \langle \frac{4}{3}\pi + 2k\pi; \frac{5}{3}\pi + 2k\pi \rangle$.

4 Analytická geometrie v rovině

4.1 **a)** $B = (-3, -2)$, **b)** $B = (3, 2)$, **c)** $B = (3, -2)$.

4.2 **a)** $2\sqrt{2}$, **b)** 4, **c)** 5, **d)** $\sqrt{8 + 2t^2}$.

4.3 **a)** ne, **b)** ano.

4.4 **a)** $y = \frac{15}{2}x - 20$, **b)** $y = -\frac{2}{3}x$, **c)** $y = \frac{5}{4}x + 3$,
d) $x = -5$, **e)** $y = 1$, **f)** $y = \frac{1}{5}x + \frac{12}{5}$.

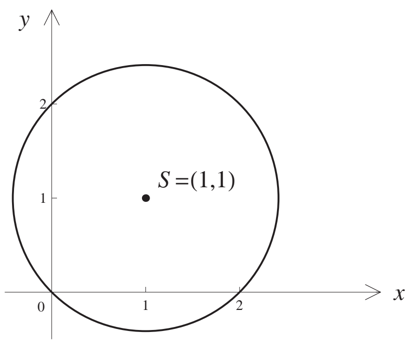
4.5 **a)** $y = -\frac{2}{15}x + \frac{23}{15}$, **b)** $y = \frac{3}{2}x - 5$, **c)** $y = -\frac{4}{5}x + \frac{21}{5}$,
d) $y = 1$, **e)** $x = 4$, **f)** $y = -5x + 21$.

4.6 **a)** $P = (-\frac{1}{5}, -\frac{2}{5})$, **b)** $P = (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, **c)** $P = (2, -1 - 2\sqrt{3})$,
d) přímky se neprotínají.

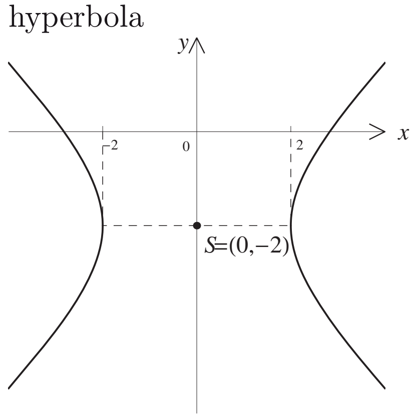
4.7 **a)** $\alpha = \frac{\pi}{4}$, **b)** $\alpha = \frac{\pi}{2}$, **c)** $\alpha = \frac{\pi}{6}$,
d) přímky jsou rovnoběžné.

4.8 **a)** $x = 2 + 2t\ ,\ y = -5 + 15t\ ,\ t \in \langle 0, 1\rangle\ ,\quad S = (3, \frac{5}{2})$,
b) $x = -3t\ ,\ y = 2t\ ,\ t \in \langle 0, 1\rangle\ ,\quad S = (-\frac{3}{2}, 1)$,
c) $x = -4 + 4t\ ,\ y = -2 + 5t\ ,\ t \in \langle 0, 1\rangle\ ,\quad S = (-2, \frac{1}{2})$,
d) $x = -5\ ,\ y = t\ ,\ t \in \langle -5, 1\rangle\ ,\quad S = (-5, -2)$,
e) $x = 4 - 7t\ ,\ y = 1\ ,\ t \in \langle 0, 1\rangle\ ,\quad S = (\frac{1}{2}, 1)$,
f) $x = 3 - 5t\ ,\ y = 3 - t\ ,\ t \in \langle 0, 1\rangle\ ,\quad S = (\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$.

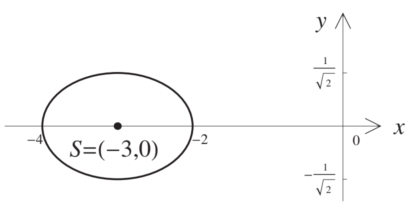
4.9 **a)** kružnice



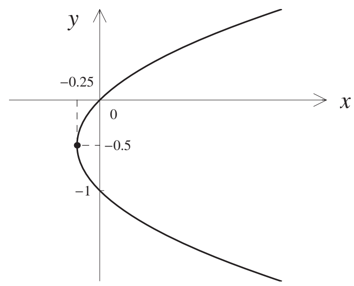
b) hyperbola



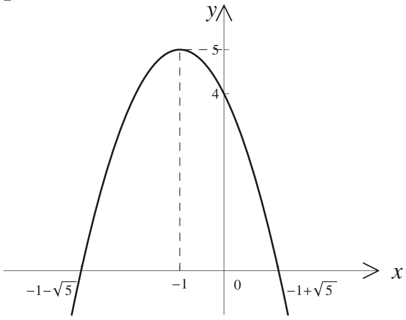
c) elipsa



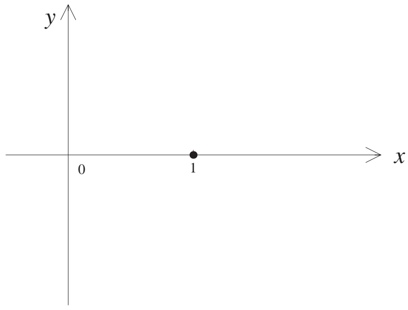
d) parabola



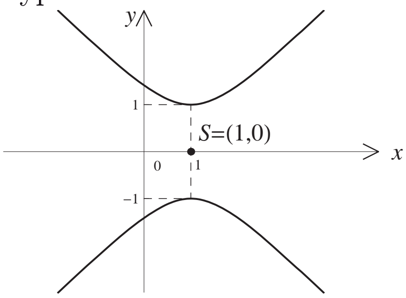
e) parabola



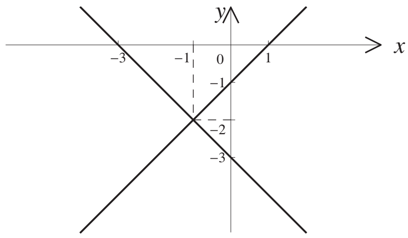
f) rovnici splňuje pouze bod $(1, 0)$



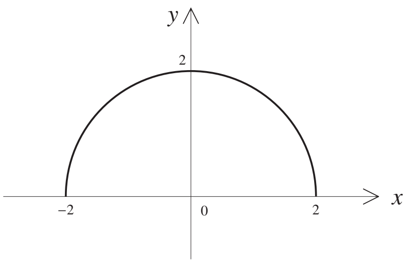
g) hyperbola



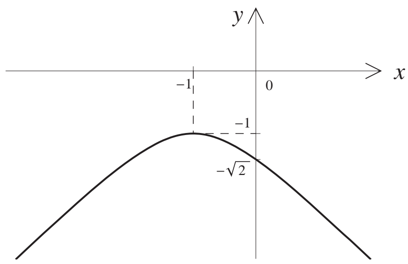
h) rovnici splňují body dvou přímek



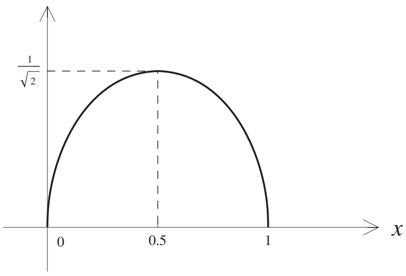
4.10 **a)**



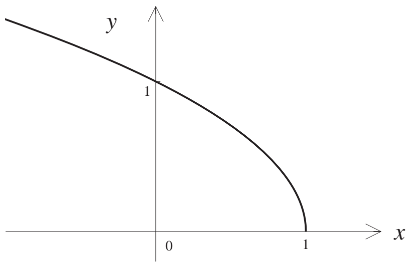
b)



c)



d)



4.11 **a)** $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$,

b) neprotínají se,

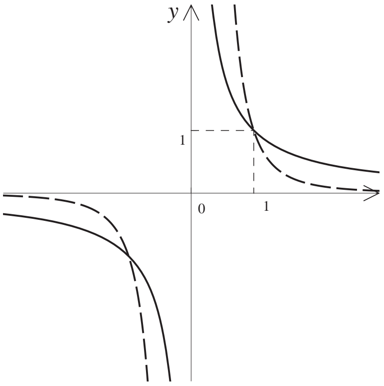
c) $(0, 0)$,

d) $\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

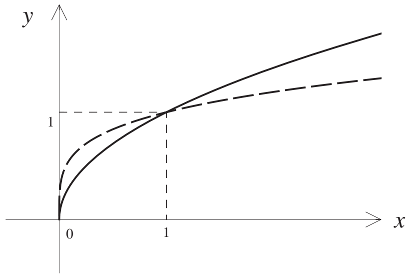
5 Funkce

5.1 Funkce f je vždy nakreslena plnou čarou, funkce g čárkovanou čarou.

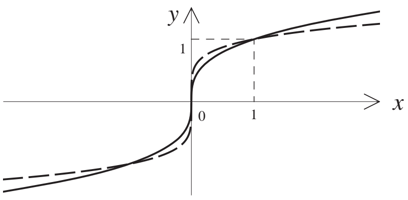
a)



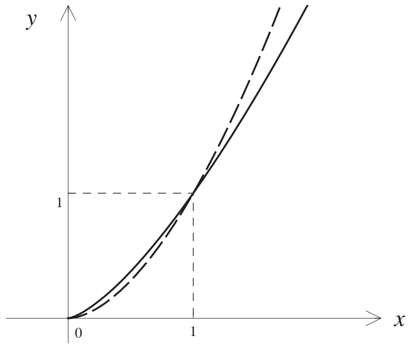
b)



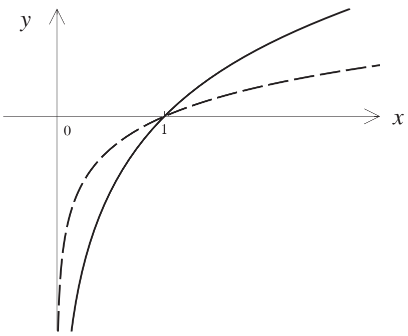
c)



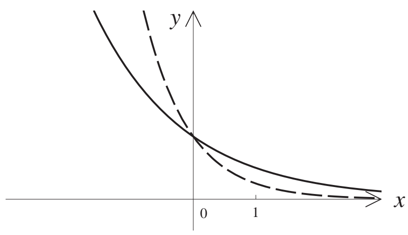
d)



e)



f)



5.2 $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{D}(g) = \langle 0, \infty)$. Pro $x \in \langle 0, \infty)$ je ale $f(x) = g(x)$.

5.3
a) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = \langle 0, \infty)$,
b) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$,
c) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$,
d) $\mathcal{D}(f) = \langle 0, \infty)$, $\mathcal{H}(f) = \langle 0, \infty)$,
e) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
f) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathcal{H}(f) = \langle 0, \infty)$,
g) $\mathcal{D}(f) = \langle 0, \infty)$, $\mathcal{H}(f) = \langle 0, \infty)$,
h) $\mathcal{D}(f) = \langle 0, \infty)$, $\mathcal{H}(f) = \langle 0, \infty)$,
i) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = (0, \infty)$,
j) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = (0, \infty)$,
k) $\mathcal{D}(f) = (0, \infty)$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$,
l) $\mathcal{D}(f) = (0, \infty)$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$,
m) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = \langle -1, 1\rangle$,
n) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$, $\mathcal{H}(f) = \langle 0, \infty$
o) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = \langle 0, 1\rangle$.

5.4 **a)** 2, **b)** -1, **c)** 6,
d) -3, **e)** -5, **f)** -10,
g) není definováno, **h)** 3, **i)** $\frac{1}{4}$.

5.5 **a)** $x = 10^{10}$, **b)** $x = 1$, **c)** $x = \frac{1}{8}$,
d) $x = \ln 10$, **e)** x neexistuje, **f)** $x = \log 2$

5.6

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\operatorname{cotg} x$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

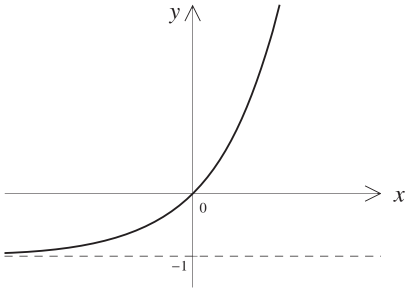
5.7 **a)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$, **b)** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, **c)** $-\frac{1}{2}$,
d) -1, **e)** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, **f)** $-\frac{1}{2}$,
g) 0 **h)** 1, **i)** -1.

5.9 **a)** $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x\ ,\ x \in \mathbb{R}$, **b)** $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x\ ,\ x \in \mathbb{R}$,
c) $\operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{2}) = -\operatorname{cotg} x\ ,\ x \neq k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$,
d) $\operatorname{cotg}(x + \frac{\pi}{2}) = -\operatorname{tg} x\ ,\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$.

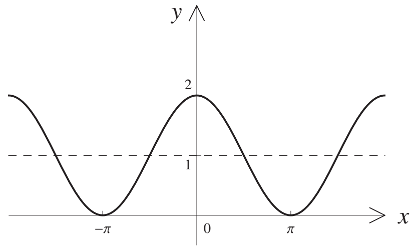
5.10 **a)** $(-\infty, 1\rangle$, **b)** $\mathbb{R}$, **c)** $\mathbb{R}$,
d) $\mathbb{R}$, **e)** $(-\infty, -4) \cup (1, \infty)$, **f)** $(0, 10^3\rangle$,
g) $\langle \frac{1}{\mathrm{e}}, \mathrm{e}^2\rangle$, **h)** $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \langle \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, \frac{13}{6}\pi + 2k\pi\rangle$,
i) $\mathbb{R} \setminus \{4\}$, **j)** $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (k\pi, \frac{3}{4}\pi + k\pi\rangle$ **k)** $(-1, 1)$,
l) $\mathbb{R}$.

5.11 **a)** $h(x) = \mathrm{e}^x + 2,\ \mathcal{D}(h) = \mathbb{R}$, **b)** $h(x) = \log(1 - x^2),\ \mathcal{D}(h) = (-1, 1)$,
c) $h(x) = \sqrt{1 - \mathrm{e}^x},\ \mathcal{D}(h) = (-\infty, 0\rangle$, **d)** $h(x) = \sqrt{(\cos x + 1)^3},\ \mathcal{D}(h) = \mathbb{R}$,
e) $h(x) = \dfrac{1}{\ln(-x^2 - 5x - 4)},\ \mathcal{D}(h) = (-4, \frac{-5-\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{-5-\sqrt{5}}{2}, \frac{-5+\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{-5+\sqrt{5}}{2}, -1)$,
f) $h(x) = \sin(x + 2),\ \mathcal{D}(h) = \langle -1, \infty)$.

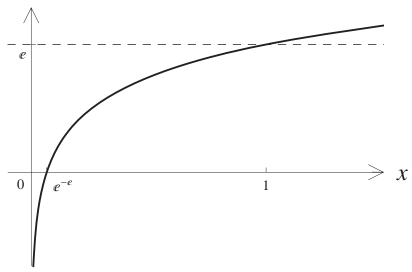
5.12 **a)** $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; $(0,0)$,



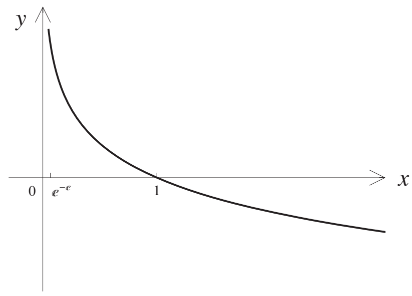
b) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; $(0,2)$, $((2k+1)\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$,



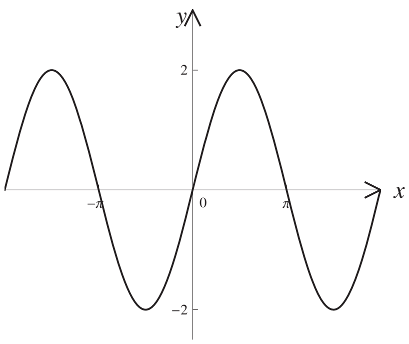
c) $\mathcal{D}(f) = (0, \infty)$; $(\mathrm{e}^{-\mathrm{e}}, 0)$,



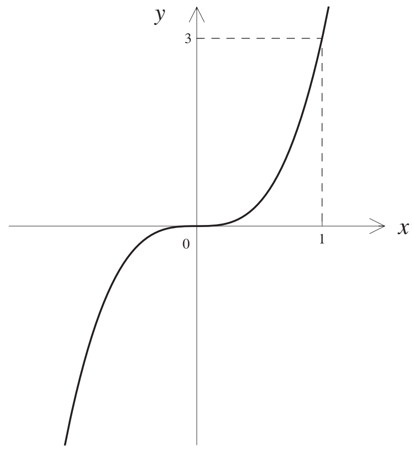
d) $\mathcal{D}(f) = (0, \infty)$; $(1, 0)$,



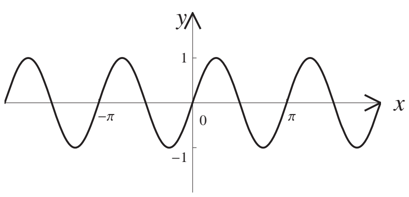
e) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; $(k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$,



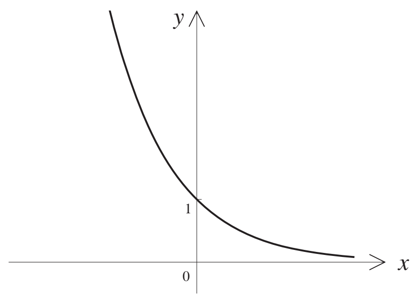
f) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; $(0,0)$,



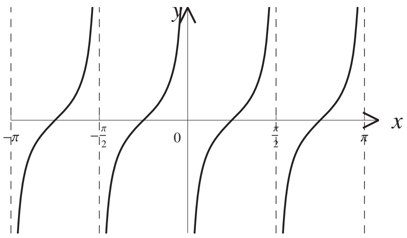
g) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; $(k\frac{\pi}{2}, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$,



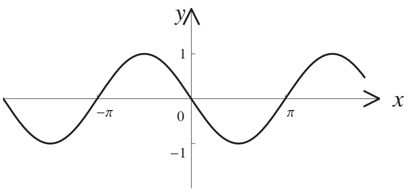
h) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; $(0,1)$,



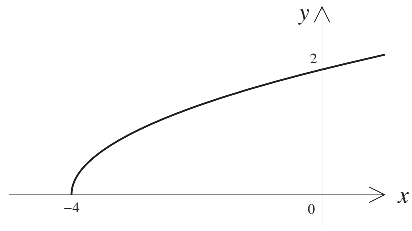
i) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{k\frac{\pi}{2}\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$; $((2k+1)\frac{\pi}{4}, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$,



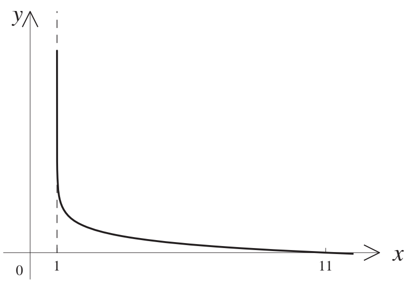
j) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; $(k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$,



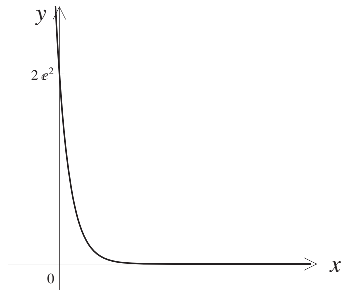
k) $\mathcal{D}(f) = \langle -4, \infty)$; $(0, 2)$, $(-4, 0)$



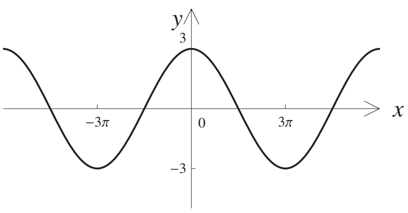
l) $\mathcal{D}(f) = (1, \infty)$; $(11, 0)$,



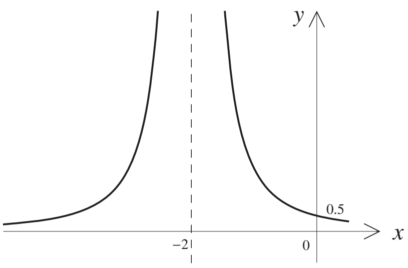
m) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; $(0, 2\mathrm{e}^2)$,



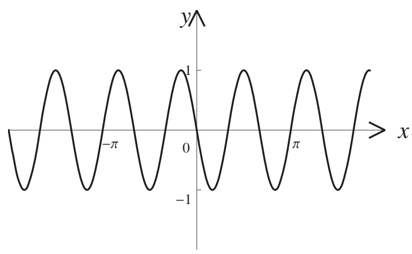
n) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; $(0, 3)$, $((2k+1)\frac{3\pi}{2}, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$,



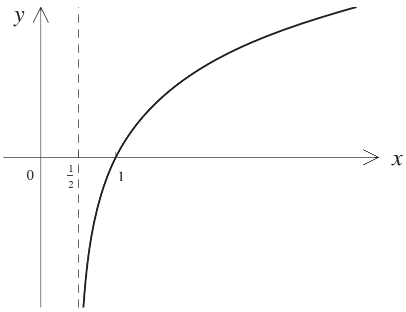
o) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$; $(0, \frac{1}{2})$,



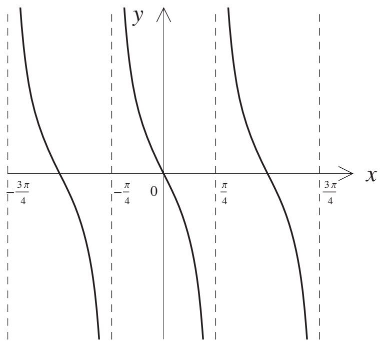
p) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; $(k\frac{\pi}{3}, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$,



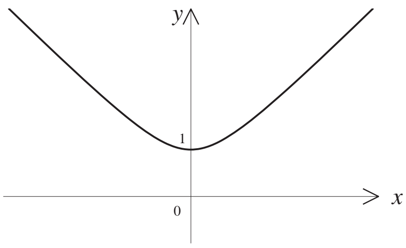
q) $\mathcal{D}(f) = (\frac{1}{2}, \infty)$; $(1, 0)$,



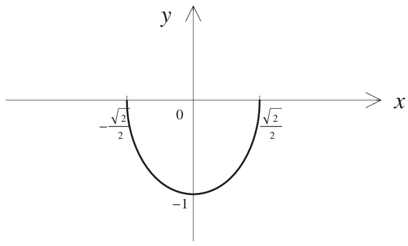
r) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{4}\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$; $(k\frac{\pi}{2}, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$.



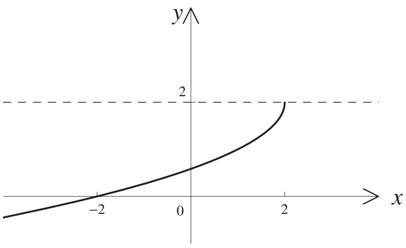
5.13 **a)** $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$,



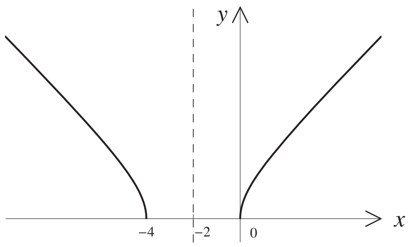
b) $\mathcal{D}(f) = \langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle$,



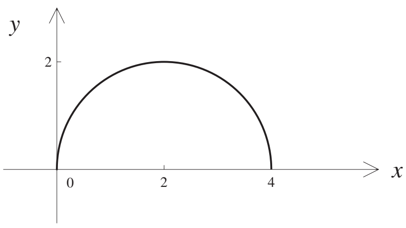
c) $\mathcal{D}(f) = (-\infty, 2\rangle$,



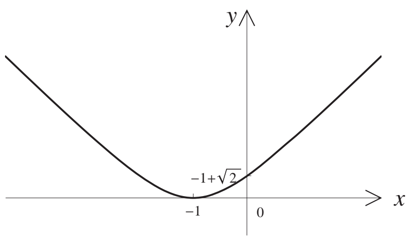
d) $\mathcal{D}(f) = (-\infty, -4\rangle \cup \langle 0, \infty)$,



e) $\mathcal{D}(f) = \langle 0, 4 \rangle$,



f) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$.



6 Komplexní čísla

6.1 **a)** $15 - 12\,\mathrm{i}$, **b)** $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{i}$, **c)** $2 + \mathrm{i}$,
d) $2 - 2\,\mathrm{i}$, **e)** $15 - 5\,\mathrm{i}$, **f)** $9 - 40\,\mathrm{i}$.

6.2 **a)** $\frac{1}{29} - \frac{17}{29}\mathrm{i}$, **b)** $\frac{4}{5} + \frac{3}{5}\mathrm{i}$, **c)** $\frac{6}{5} - \frac{1}{10}\mathrm{i}$,
d) $-\frac{5}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{i}$, **e)** $\frac{\sqrt{10}}{2}$, **f)** $\sqrt{290}$.

6.3 **a)** $2\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$, **b)** $\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{4}\right)$, **c)** $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$,
d) $2\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)$, **e)** $6\left(\cos\frac{5\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{3}\right)$, **f)** $5\left(\cos\frac{3\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2}\right)$.

6.4 **a)** $2\,\mathrm{i}$, **b)** $\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\mathrm{i}$, **c)** $-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$,
d) $-1 + \mathrm{i}$, **e)** $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\mathrm{i}$, **f)** 1 .

6.5 **a)** $\sqrt{2} - \sqrt{2}\,\mathrm{i}$, **b)** $-8 + 8\sqrt{3}\,\mathrm{i}$, **c)** -1 ,
d) $-3888 + 3888\sqrt{3}\,\mathrm{i}$

6.6 **a)**
$$\begin{aligned}
z_0 &= 2\sqrt[6]{2}\left(\cos\tfrac{\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\tfrac{\pi}{12}\right)\\
z_1 &= 2\sqrt[6]{2}\left(\cos\tfrac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\tfrac{3\pi}{4}\right) = \sqrt[3]{4}(-1 + \mathrm{i})\\
z_2 &= 2\sqrt[6]{2}\left(\cos\tfrac{17\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\tfrac{17\pi}{12}\right) ,
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
z_0 &= 2\left(\cos\tfrac{\pi}{5} + \mathrm{i}\sin\tfrac{\pi}{5}\right)\\
z_1 &= 2\left(\cos\tfrac{3\pi}{5} + \mathrm{i}\sin\tfrac{3\pi}{5}\right)\\
z_2 &= 2\left(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi\right) = -2\\
z_3 &= 2\left(\cos\tfrac{7\pi}{5} + \mathrm{i}\sin\tfrac{7\pi}{5}\right)\\
z_4 &= 2\left(\cos\tfrac{9\pi}{5} + \mathrm{i}\sin\tfrac{9\pi}{5}\right)
\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt[4]{8}\left(\cos\tfrac{5\pi}{8} + \mathrm{i}\sin\tfrac{5\pi}{8}\right)\\
z_1 &= \sqrt[4]{8}\left(\cos\tfrac{13\pi}{8} + \mathrm{i}\sin\tfrac{13\pi}{8}\right) ,
\end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned}
z_0 &= \left(\cos\tfrac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\tfrac{\pi}{6}\right) = \tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{i}\\
z_1 &= \left(\cos\tfrac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\tfrac{\pi}{2}\right) = \mathrm{i}\\
z_2 &= \left(\cos\tfrac{5\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\tfrac{5\pi}{6}\right) = -\tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{i}\\
z_3 &= \left(\cos\tfrac{7\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\tfrac{7\pi}{6}\right) = -\tfrac{\sqrt{3}}{2} - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{i}\\
z_4 &= \left(\cos\tfrac{3\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\tfrac{3\pi}{2}\right) = -\mathrm{i}\\
z_5 &= \left(\cos\tfrac{11\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\tfrac{11\pi}{6}\right) = \tfrac{\sqrt{3}}{2} - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{i} ,
\end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} z_0 &= 2\sqrt[3]{2}\left(\cos\tfrac{\pi}{2} + \mathrm{i}\,\sin\tfrac{\pi}{2}\right) = 2\sqrt[3]{2}\,\mathrm{i} \\ z_1 &= 2\sqrt[3]{2}\left(\cos\tfrac{7\pi}{6} + \mathrm{i}\,\sin\tfrac{7\pi}{6}\right) = \sqrt[3]{2}\left(-\sqrt{3} - \mathrm{i}\right) \\ z_2 &= 2\sqrt[3]{2}\left(\cos\tfrac{11\pi}{6} + \mathrm{i}\,\sin\tfrac{11\pi}{6}\right) = \sqrt[3]{2}\left(\sqrt{3} - \mathrm{i}\right)\,, \end{aligned}$$

f) $$\begin{aligned} z_0 &= 2\left(\cos\tfrac{\pi}{6} + \mathrm{i}\,\sin\tfrac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + \mathrm{i} \\ z_1 &= 2\left(\cos\tfrac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\,\sin\tfrac{2\pi}{3}\right) = -1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i} \\ z_2 &= 2\left(\cos\tfrac{7\pi}{6} + \mathrm{i}\,\sin\tfrac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} - \mathrm{i} \\ z_3 &= 2\left(\cos\tfrac{5\pi}{3} + \mathrm{i}\,\sin\tfrac{5\pi}{3}\right) = 1 - \sqrt{3}\,\mathrm{i}\,. \end{aligned}$$

**Doc. RNDr. Daniel Turzík, CSc., RNDr. Miroslava Dubcová, Ph.D.,
RNDr. Pavla Pavlíková, Ph.D.**

ZÁKLADY MATEMATIKY PRO BAKALÁŘE

Vydala	Vysoká škola chemicko-technologická v Praze Vydavatelství VŠCHT Praha Technická 5, 166 28 Praha 6
Tisk	KANAG – TISK, s.r.o., Technická 5, 166 28 Praha 6
Počet stran	127
Vydání	první
Náklad	500 výtisků

http://www.vscht.cz/eso

Portál ESO (Elektronické Studijní Opory)

Neustále doplňovaný přehled
všech elektronických učebních pomůcek
pro studenty VŠCHT Praha

http://vydavatelstvi.vscht.cz

ISBN 978-80-7080-787-3