VYSOKÁ ŠKOLA
CHEMICKO-TECHNOLOGICKÁ
V PRAZE

INFORMAČNÍ TERMODYNAMIKA I.

Rovnovážná termodynamika přenosu informace

Bohdan Hejna

Vydavatelství VŠCHT Praha
2010

Publikace přináší detailnější a nové pohledy na souvislosti termodynamiky a přenosu informace. Stanovuje ztrátu informace jako nutnou podmínku při jejím přenosu, a to jako důsledek i jen možné fyzikální realizace tohoto přenosu. Dále specifikuje Gibbsův paradox jako vlastnost pozorování a jeho realizace. Ten se takto jeví jako problém gnozelogického charakteru jehož důvod tkví v představě pozorovatele o pozorovaném, vyjádřený organizací měřicí metody.
Autor zavádí zcela nový pojem „Ekvivalenční princip termodynamiky". Ten vyjadřuje informačně-termodynamickou rovnocennost I., II. a III. hlavní věty termodynamické.

Práce vznikla v rámci výzkumného záměru MŠM 6046137307.

Recenzent: prof. Ing. Radomír Adamovský, DrSc.

ISBN 978-80-7080-747-7

Obsah

1. Úvod

V tomto textu se zabývám fyzikálními, speciálně termodynamickými aspekty jevu informace a jejího přenosu prostřednictvím přenosu zpráv, signálů. Ale i naopak, zabývám se také informačními aspekty základních termodynamických veličin a procesu transformace tepelné energie.

Konstruuji rovnovážný, termodynamický cyklický model přenosového kanálu teorie informace. Tímto modelem nebo i přímo takto konstruovaným přenosovým kanálem je zde Carnotův cyklus, obecně jakýkoli tepelný cyklus, protože každý tepelný cyklus je převoditelný na případ ekvivalentního, ideálního cyklu Carnotova.

Činím tak proto, abych mohl určit vztah mezi *informační (Shannonovou) entropií* (1948), zavedenou kombinatoricky a *termodynamickou entropií Clausiovou* (1850). Ta je ale jen *Boltzmannovou entropií* (1872) rovnovážného (stavu) termodynamického systému; obecně je definována pro jakýkoliv (rovnovážný i nerovnovážný) stav termodynamického systému.

Ukazuji, že lze použít jen *jeden pojem* entropie, a to pojem *entropie* bez přívlastků,
a) ve smyslu *informačním, volném*, bez vazby na jakoukoli fyzikální realizaci (náhodného) jevu a jeho informačního obsahu nebo
b) ve smyslu *termodynamickém*, obecněji *vázaném*, fyzikálním; pak hovořím o *extenzitě* relevantních fyzikálních veličin. Z nich je pro nás nejdůležitější tepelná extenzita, Clausiova entropie. Je to termodynamicky vázaná, realizovaná informační entropie uniformního rozdělení pravděpodobnosti na jistém stavovém prostoru systému (v termodynamické rovnováze).

Tato ekvivalence pak umožňuje zkoumat přenos informace termíny termodynamiky, speciálně termíny cyklické transformace tepla na mechanickou energii ale také naopak, můžeme takové termodynamické procesy popisovat termíny informačními. Formuluji informační znění tradičních (fyzikálních) formulací *II. hlavní věty termodynamické*.

Termodynamický model přenosu informace (přenosu zpráv, též tzv. *přenosu zdroje zpráv*) umožňuje formulovat tvrzení o informačním významu *Gibbsova paradoxu*. Ten se tak jeví právě jen jako důsledek fyzikálních vlastností pozorování, měření atp., krátce reálných vlastostí přenosu zpráv jistým přenosovým, sdělovacím kanálem. Tím je např. měřící aparatura včetně jejího nastavení. To je dáno pozorovatelovou představou o měřeném objektu, v našem případě o termodynamickém systému (jeho vlastnostech, struktuře a možných měřitelných, pozorovatelných hodnotách, výstupních zprávách měření). Je tedy tato představa právě to, co (podstatně) definuje informační parametry pozorování, a tedy i informační zisk. Jeho deficit konstatovaný Gibbsovým paradoxem pak lze též formálně vyjádřit i vlastností informační entropie jako funkcionálu na množině rozdělení pravděpodobností nebo i její subaditivitou.

Tato analýza nakonec umožňuje formulovat důkaz II. hlavní věty termodynamické, aniž se při tom podstatně vzdalujeme z termodynamiky samé. Spíše ji jen obohacujeme o informační, termodynamicky realizované pojmy a veličiny a celý důkaz pak plyne z informačních vztahů mezi těmito veličinami. Skromněji řečeno, důkazem II. hlavní věty termodynamické je odvození vztahu mezi informačními entropiemi definovanými na přenosovém kanále [Shannon 1948], chápanými termodynamicky, jako realizační veličiny opakovatelného pozorování, měření.

II. hlavní věta termodynamická je zde tedy dokázána jako vlastnost systému dvojice náhodných veličin realizujících přenosový kanál, uvažujeme-li jejich termodynamickou vázanost v tom smyslu, že popisují Carnotův cyklus.

Nakonec formuluji *princip ekvivalence I. II. a III. hlavní věty termodynamické* plynoucí z právě uvedeného smyslu důkazu II. hlavní věty, tedy ze společného, termodynamicky chápaného popisu přenosového kanálu.

Poděkování patří prof. RNDr. Aloisi Klíčovi, CSc., vedoucímu Ústavu matematiky, dále prof. Ing. Karlu Volkovi, CSc., z Ústavu analytické chemie a prof. RNDr. Petru Voňkovi, CSc., z Ústavu fyzikální chemie na VŠCHT Praha, kteří mi umožnili pracovat na tomto zajímavém tematu. Děkuji i prof. Ing. Anatolu Malijevskému, CSc., a Doc., Ing. Ivanu Samohýlovi, CSc., a zvláště recenzentovi prof. Ing. Radomíru Adamovskému, Dr.Sc., z ČZU a FSI ČVUT za projevený zájem o téma publikace. Děkuji také paní Ing. Evě Dibuszové, Ph.D., a slečně Petře Pohunkové z Vydavatelství VŠCHT Praha za pečlivý návrh redakčních úprav jakož i panu Janu Žaludovi za úpravu obrázků.
Poděkování patří mé ženě Soně, dětem Terezce a Tomáškovi a celé mé rodině za jejich trpělivost a podporu.

Praha, Jičín, Kosobody u Rakovníka 2010 *Bohdan Hejna*

2. Carnotův cyklus

2.1 Vratný Carnotův cyklus

Vratný Carnotův cyklus $\mathcal{O}$ je nejjednodušší tepelný *kruhový děj, oběh*, končící ziskem mechanické práce $\Delta A > 0$. Sestává ze čtyř *vratných* změn, dvou různých izoterm při dvou (různých) konstantních *termodynamických (absolutních)* teplotách T_W a T_0, kde je $T_W > T_0 > 0$
a dvou různých adiabat zajišťujících přechody mezi těmito teplotami v *pracovní látce*, transformátoru vstupní energie ΔQ_W. Pracovní látka, *termodynamický systém* $\mathcal{L}$ během průchodu tímto cyklem nabírá při vratné izotermické expanzi při teplotě T_W *ohříváku* $\mathcal{A}$ tímto cyklem $\mathcal{O}$ transformované, *vstupní* teplo ΔQ_W. Při vratné izotermické kompresi při teplotě T_0 *chladníku* $\mathcal{B}$ odevzdává systém $\mathcal{L}$ do $\mathcal{B}$ *odpadní* teplo ΔQ_0. Tyto izotermické změny probíhají tzv. *diatermicky*, tj. za dokonale tepelně vodivého styku mezi $\mathcal{L}$ a $\mathcal{A}$ a mezi $\mathcal{L}$ a $\mathcal{B}$. Pro kladný zisk mechanické práce ΔA musí vždy platit

$$T_W > T_0 > 0 \tag{2.1}$$

Adiabatickou vratnou (tudíž *izentropickou*) expanzí je systém $\mathcal{L}$ ochlazován z teploty T_W na teplotu T_0. Adiabatickou (vratnou, izentropickou) kompresí je naopak zahříván z teploty T_0 na teplotu T_W. Tyto změny probíhají za *adiabatické*, tj. dokonalé tepelné izolace $\mathcal{L}$ a jejího okolí $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$. Vliv adiabatických změn se v celkové bilanci mechanických prací (mechanických energií), do látky $\mathcal{L}$ během cyklu přivedených a z látky $\mathcal{L}$ během cyklu získaných, ruší. Rozdíl tepel ΔQ_W a ΔQ_0, $\Delta Q_W > 0$, $\Delta Q_0 > 0$, je roven v cyklu získané mechanické práci ΔA,

$$\Delta A = \Delta Q_W + (-\Delta Q_0), \text{ resp. } \Delta A = \Delta Q_W + \Delta Q^*{}_0, \text{ pokud } \Delta Q^*{}_0 \stackrel{\triangle}{=} -\Delta Q_0 \tag{2.2}$$

Znaménkem + označujeme tepla do $\mathcal{L}$ během cyklu (přímo) přivedená (kladná) a znaménkem − tepla z $\mathcal{L}$ během cyklu (přímo) odvedená (záporná). Podrobněji viz Obr. 2.1, kde

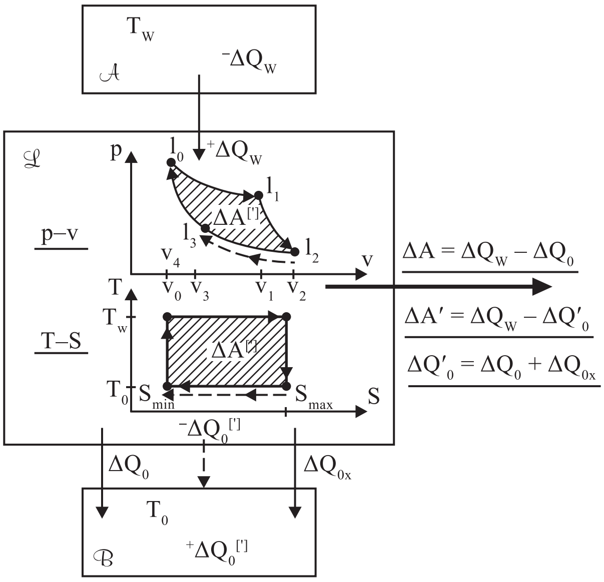
1. l_0-l_1: *izotermická expanze*; teplo ΔQ_W přechází z $\mathcal{A}$ do $\mathcal{L}$, teplota $\mathcal{L}$ je T_W, je konána mechanická práce $\Delta A_{0,1} = \Delta Q_W = RT_W \ln(v_2/v_1)$,

2. l_1-l_2: *adiabatická, izentropická expanze*; ochlazování látky $\mathcal{L}$ z teploty T_W na teplotu T_0 zvětšováním jejího objemu s vykonáním mechanické práce $\Delta A_{1,2}$, $\Delta A_{1,2} = c_v(T_0 - T_W)$, na úkor její vnitřní energie U, $\Delta U = \Delta A_{1,2}$, $\Delta U < 0$,

3. l_2-l_3: *izotermická komprese*; do chladníku $\mathcal{B}$ přechází z látky $\mathcal{L}$, při teplotě T_0, odpadní teplo ΔQ_0 o velikosti kompresní práce $\Delta A_{2,3} = \Delta Q_0 = RT_0 \ln(v_4/v_3)$

4. l_3-l_0: *adiabatická, izentropická komprese*; návrat $\mathcal{L}$ do výchozího bodu cyklu spotřebováním mechanické energie $\Delta A_{3,4} = c_v(T_W - T_0)$ na úkor mechanické energie (práce) $\Delta A_{1,2}$ vykonané ve 2., $\Delta U > 0$.

Systém $\mathcal{L}$ uvažujeme v jednotkovém látkovém množství 1 kmol, c_v je měrné molární teplo za stálého objemu, v je *molární* objem.
Vliv adiabatických změn 2. a 4. se ruší; podmínka uzavřenosti celé termodynamické cesty $\mathcal{O} \cong l_0$-l_1-l_2-l_3-l_0, je dána poměrem objemů $v_2 : v_1 = v_3 : v_4$.



Obr. 2.1: Carnotův cyklus

Vratný Carnotův cyklus lze tedy definovat jako *smyčku* (uzavřený, spojitý sled) $\mathcal{O}$ *rovnovážných* stavů termodynamického *systému* $\mathcal{L}$, tvořenou dvěma různými vratnými izotermami a adiabatami. Tato smyčka je jednoduchou, po částech hladkou, orientovanou, uzavřenou křivkou v kartézském souřadnicovém systému p-v nebo systému T-S, se čtyřmi hroty určenými podmínkou její uzavřenosti, Obr. 2.1. Hovoříme také o cyklickém *stavovém* diagramu p-v *(tlakovém)* nebo T-S *(entropickém)*.
Veličiny p, v a T jsou *stavové veličiny*, parametry *tlak, (molární) objem* a *termodynamická teplota*. Termodynamický systém $\mathcal{L}$ popsaný stavovými veličinami p, v, T též nazýváme *chemický* systém. Parametry p, T jsou parametry *vnitřní*, *intenzivní*, parametr v je *vnější*, *extenzivní*. Veličina S je *stavová* funkce nazývaná *tepelná entropie* a je rovněž extenzivním parametrem systému $\mathcal{L}$. Entropii S též nzýváme *extenzita* a termodynamickou (absolutní) teplotu T *intenzita* tepelné energie Q.[1]
Obecněji, je-li $\mathcal{Q}$ energie daného druhu, ϑ její intenzita a $\mathcal{S}$ její extenzita, platí mezi nimi [18] vztah

$$\Delta\mathcal{Q} = \vartheta\Delta\mathcal{S}, \quad \text{resp.} \quad \delta\mathcal{Q} = \vartheta \,\mathrm{d}\mathcal{S}$$

Symbolem δ vyznačujeme, že teplo Q (obecně) může být *parciální* diferenciál funkcí stavových proměnných.

[1]Viz Dodatky 8.1.

Při označení $\mathcal{Q} \triangleq Q$, teplo, $\vartheta \triangleq \Theta$, termodynamická teplota, $\mathcal{S} \triangleq S$, tepelná entropie, získáváme tzv. *Clausiův* definiční vztah

$$\Delta Q(\Theta) = \Theta\Delta S, \quad \text{resp.} \quad \delta Q(\Theta) = \Theta \ \mathrm{d}S \tag{2.3}$$

kde $\Delta Q(\Theta)$ resp. $\delta Q(\Theta)$ jsou tepla vratně (izotermicky) sdělená při teplotě Θ.

Z Obr. 2.1 je zřejmé, že plocha obklopená cyklickým diagramem p-v nebo T-S vyjadřuje celkovou mechanickou práci ΔA, vykonanou systémem $\mathcal{L}$ podle vztahu (2.2), transformací vstupního tepla ΔQ_W v rámci *jednoho průchodu* $\mathcal{L}$ tepelným cyklem (tj. podél smyčky) $\mathcal{O}$;

$$\Delta A = \oint_O p \ \mathrm{d}v = \oint_O \Theta \ \mathrm{d}S$$

Účinnost vratného Carnotova cyklu, označme ji $\eta_{\max}$, je definována vztahem

$$\eta_{\max} \stackrel{\mathrm{Def}}{=} \frac{\Delta A}{\Delta Q_W} = \frac{\Delta Q_W + (-\Delta Q_0)}{\Delta Q_W} \tag{2.4}$$

Podle vztahu (2.4), s vyjádřením izotermické práce a při podmínce uzavřenosti termodynamické cesty $\mathcal{O}$, ve vratném Carnotově cyklu platí

$$\eta_{\max} = \frac{\Delta Q_W - \Delta Q_0}{\Delta Q_W} = \frac{RT_W \ln \dfrac{v_2}{v_1} - RT_0 \ln \dfrac{v_3}{v_4}}{RT_W \ln \dfrac{v_2}{v_1}} = \frac{T_W - T_0}{T_W} \tag{2.5}$$

a tedy

$$1 - \frac{\Delta Q_0}{\Delta Q_W} = 1 - \frac{T_0}{T_W} \tag{2.6}$$

Z Clausiova vztahu (2.3) a z (2.4) plyne ale vztah (2.6) okamžitě, bez nutnosti znát izotermické práce $\Delta A_{0,1}$, $\Delta A_{3,4}$.

Veličinu $\eta_{\max}$ nazýváme *transformační* účinnost vratného Carnotova cyklu (přesněji *reverzibilní*, vratná účinnost) s pracovními teplotami T_W a T_0, $T_W \geq T_0 > 0$.

Z Carnotovy věty, viz dále, vyplývá, že je to *maximum* množiny účinností všech tepelných cyklů s těmito extremálními pracovními teplotami vůbec (uvažujeme-li proměnnost pracovních teplot).

Podle (2.6) ve vratném Carnotově cyklu platí

$$\frac{\Delta Q_W}{T_W} = \frac{\Delta Q_0}{T_0} \tag{2.7}$$

$$\frac{\Delta Q_W}{T_W} + \left(-\frac{\Delta Q_0}{T_0}\right) = 0, \quad \text{resp.} \quad \frac{\Delta Q_W}{T_W} + \frac{\Delta Q^*{}_0}{T_0} = 0 \tag{2.8}$$

v obecnějším zápisu

$$\sum_{i \in \{W,0\}} \frac{\Delta Q(T_i)}{T_i} \triangleq \oint_{\mathcal{O}} \frac{\delta Q(\Theta)}{\Theta} = 0, \quad \Delta Q(T_i) \triangleq \Delta Q_i \tag{2.9}$$

Integrál v posledním vztahu v (2.9) nazýváme *Clausiův* integrál.

Vztah (2.9) je matematickým (integrálním) vyjádřením II. *hlavní věty termodynamické* v ***Thomsonově-Planckově*** formulaci, která říká:
Nelze sestrojit tepelný cyklus, v němž by veškeré teplo přivedené do systému $\mathcal{L}$, který prochází tímto cyklem, bylo přeměněno na ekvivalentní množství mechannické práce. (Nelze sestrojit perpetuum mobile druhého druhu.)

V případě vratného Carnotova cyklu $\mathcal{O}$ je tedy algebraický součet všech *teplotně redukovaných tepel*, tepelných entropií, do cyklu přímo přivedených a z něj přímo odvedených, tedy Clausiův integrál (2.9), roven nule. Z Thomsonovy-Planckovy formulace II. hlavní věty termodynamické tedy plyne, že kromě tepla ($\Delta Q_{i=W}$) do cyklu $\mathcal{O}$ (do látky $\mathcal{L}$ procházející tímto cyklem) (přímo) přiváděného, existuje i teplo ($\Delta Q_{i=0}$) z cyklu $\mathcal{O}$ (přímo) odváděné. V důsledku existence těchto tepel, vstupního ΔQ_W a 'odpadního' ΔQ_0 a toho, že platí I. věta termodynamická ($\Delta Q_W = \Delta Q_0 + \Delta A$), tedy musí platit, že

$$\eta_{\max} < 1 \tag{2.10}$$

Teplo ΔQ_0, které je z látky $\mathcal{L}$ při teplotě T_0 odváděno, je ale ekvivalentní kinetické energii ΔE_{K_0}, v níž se přeměňuje část ΔE_{P_0} výstupní (mechanické) potenciální energie E_{P_W}. Energie $\Delta E_{\mathrm{K}_0} = \Delta E_{\mathrm{P}_0}$ je odebírána z mechanického výstupu cyklu $\mathcal{O}$, podél křivky l_2-l_3 izotermické komprese při teplotě T_0. Energie E_{P_W} vzniká při teplotě T_W podél křivky izotermické expanze l_0-l_1, např. zdvižením závaží o hmotnosti m do výšky $l = \dfrac{\Delta Q_W}{mg}$, $\Delta Q_W = E_{\mathrm{P}_W}$, $\Delta A = E_{\mathrm{P}_W} - \Delta E_{\mathrm{P}_W}$, Obr. 2.1.

Stroj s ohřívákem $\mathcal{A}$, chladníkem $\mathcal{B}$ a pracovní látkou $\mathcal{L}$ procházející kruhovým dějem se ziskem mechanické práce, v nějž se přeměňuje část vstupního tepla cyklu, nazýváme *tepelný motor*.
(Takový tepelný motor, jehož pracovní látka by procházela cyklem v rozporu se II. hlavní hlavní větou termodynamickou, aniž by ale byla porušena I. hlavní věta termodynamická, zákon zachování energie v termodynamických systémech, nazýváme právě *perpetuum mobile druhého druhu*.)

2.2 Reverzní vratný Carnotův cyklus

Tento cyklus je vratným Carnotovým, cyklem v němž systém $\mathcal{L}$ koná oběh po křivce $\mathcal{O}$ v opačném smyslu, počínaje izotermickou expanzí při diatermickém styku $\mathcal{L}$ a $\mathcal{B}$ (při teplotě T_0). Jedná se tedy o oběh látky $\mathcal{L}$ (rovnovážnými) stavy ležícími na orientované křivce l_3-l_2-l_1-l_0-l_3, Obr. 2.1. Nazýváme jej také *chladicí* oběh. Carnotův stroj s takto organizovaným průchodem jeho pracovní látky $\mathcal{L}$ tepelným cyklem $\mathcal{O}$, pracuje jako *tepelné čerpadlo, chladicí stroj*. Činnost tepelného čerpadla je následující:
Při izotermické expanzi při teplotě T_0 systém $\mathcal{L}$ odebírá z chladníku $\mathcal{B}$ *přečerpávané, přenášené* teplo ΔQ_0. Při izotermické kompresi při teplotě T_W je z $\mathcal{L}$ dodáváno do

ohříváku $\mathcal{A}$ *výstupní* teplo

$$\Delta Q_W = \Delta Q_0 + \Delta A \tag{2.11}$$

Veličina ΔA je *vstupní* mechanická energie (práce) dodaná látce $\mathcal{L}$ při izotermické kompresi při teplotě T_W.

Carnotova věta (**první část**) říká:
Účinnost všech vratných Carnotových cyklů (ve smyslu použitých pracovních látek) s týmiž konstantními pracovními teplotami T_W a T_0, $T_W \geq T_0 > 0$, je stejná.

Důkaz: V opačném případě bychom vhodným spřažením dvou Carnotových strojů (cyklů) s různými účinnostmi mohli zkonstruovat perpetuum mobile druhého druhu takto:
Budeme uvažovat dva stroje $\mathcal{O}_1$ a $\mathcal{O}_2$ se společným ohřívákem $\mathcal{A}$ a společným chladníkem $\mathcal{B}$. Stroj $\mathcal{O}_1$ s větší účinností η_1 dodávající práci o velikosti ΔA_1, by jako tepelný motor poháněl stroj $\mathcal{O}_2$ s menší účinností η_2, který by pracoval jako tepelné čerpadlo spotřebovávající mechanickou práci o velikosti ΔA_2. Při společných pracovních teplotách $\Theta_{\mathcal{A}}$ a $\Theta_{\mathcal{B}}$, $\Theta_{\mathcal{A}} > \Theta_{\mathcal{B}}$, z nerovnosti $\eta_1 > \eta_2$ plyne nerovnost $\Delta A_1 > \Delta A_2$.
Nechť pro velikost tepla q_1 odebíraného strojem $\mathcal{O}_1$ z $\mathcal{A}$ a velikost tepla q_2 dodávaného do $\mathcal{A}$ strojem $\mathcal{O}_2$ platí $q_1 = q_2$. Je-li pak q_{01} velikost tepla dodaného do $\mathcal{B}$ strojem $\mathcal{O}_1$ a q_{02} velikost tepla odebraného z $\mathcal{B}$ strojem $\mathcal{O}_2$, musí platit $q_{01} < q_{02}$. Potom je, po průchodu $\mathcal{L}$ složeným cyklem soustrojí, jediné tepelné lázni $\mathcal{B}$ odebráno teplo $q = q_{02} - q_{01}$ a je vykonána mechanická práce $\Delta A = \Delta A_1 - \Delta A_2$. Podle I. *hlavní věty termodynamické* $\Delta A = q$. Tak je ale zkonstruován tepelný stroj s cyklem odporujícím II. hlavní větě termodynamické. Jedná se o tzv. perpetuum mobile druhého druhu.
Proto musí platit $\eta_1 = \eta_2$.
(První část Carnotovy věty je tak jen jinou variantou Thomsonovy-Planckovy formulace II. *hlavní věty termodynamické.*)

Vratností (termodynamické) změny stavu *libovolného* termodynamického systému rozumíme, že tato změna je *kvazistacionární*, tedy je nekonečně *malá* a probíhá nekonečně *pomalu*;

$$\Delta t \to \infty, \quad t \text{ je čas.} \tag{2.12}$$

Tehdy se nemění kinetická energie E_{K} systému $\mathcal{L}$ a proto se ani neprojevuje vliv přemáhání pasivních odporů třením v něm a nenastává v něm tak (kladná) *produkce* tepla. Označme jej ΔQ_{0x}, $\Delta Q_{0x} \geq 0$.

Při průchodu systému $\mathcal{L}$ vratným Carnotovým cyklem $\mathcal{O}$ tedy platí

$$\Delta Q_{0x} = 0 \tag{2.13}$$

Vratný Carnotův cyklus je tedy myšlenková konstrukce, fungující bez jakýchkoliv omezení hodnot T_W a T_0, kromě $T_W \geq T_0$ nebo materiálových omezení systémem, látkou $\mathcal{L}$. Můžeme jej tedy uvažovat jak v látce *ideální*, tak *neideální*.

Pokud vratný Carnotův cyklus probíhá v ideální látce, *dokonalém* plynu, hovoříme o *ideálním* Carnotově cyklu. Cyklus by ale mohl být vratný i pro $0 < \Delta t < \infty$, pokud by změna kinetické energie E_{K} systému $\mathcal{L}$ nevedla k produkci tepla, tedy pokud by platil vztah (2.13). To nastává u ideálních, neviskozních látek $\mathcal{L}$ vždy.

2.3 Nevratný Carnotův cyklus

Je-li systém $\mathcal{L}$ *neideální*, např. je-li to *reálný* plyn (jeho modelem je např. plyn van der Waalsův) a probíhá-li oběh s konečnou, ale nenulovou rychlostí,

$$0 < \Delta t < \infty, \quad t \text{ je čas} \tag{2.14}$$

pak vnitřním třením v systému $\mathcal{L}$, způsobeným jeho viskozitou, v něm vzniká celkové *šumové, rušivé* teplo ΔQ_{0x}.

Neideálnost látky $\mathcal{L}$ se tedy projevuje při změnách jejího stavu, neprochází-li kvazistacionármím (2.12), (2.13), a tudíž i vratným cyklem $\mathcal{O}$, nýbrž prochází-li cyklem $\mathcal{O}'$, *nekvazistacionárním, nestatickým*, trvajícím *konečně* dlouhou dobu (2.14). Tehdy se mění kinetická energie E_{K} systému $\mathcal{L}$ a vlivem přemáhání pasivních odporů třením nastává v látce $\mathcal{L}$ (kladná) *produkce* tepla ΔQ_{0x},

$$\Delta Q_{0x} > 0 \tag{2.15}$$

Carnotova věta (**druhá část**) říká:
Účinnost libovolného nevratného tepelného cyklu s extremálními pracovními teplotami T_W a T_0, $T_W \geq T_0 > 0$, je menší než účinnost odpovídajícího vratného cyklu a ta je menší než u vratného Carnotova cyklu s týmiž konstantními pracovními teplotami.

Důkaz: V opačném případě by nevratný stroj s účinností η_1 pracující jako tepelný motor mohl pohánět vratný Carnotův stroj s účinností η_2, $\eta_2 < \eta_1$, pracující jako tepelné čerpadlo, stejně jako v předcozím případě. Tak bychom zkonstruovali perpetuum mobile druhého druhu, což vylučuje II. hlavní věta termodynamická v Thomsonově-Planckově formulaci. Kdyby platilo $\eta_1 = \eta_2$, po průchodu systému $\mathcal{L}$ celým cyklem soustrojí bychom v $\mathcal{L}$ nepozorovali žádné změny, celý cyklus soustrojí by mohl probíhat v opačném směru a byl by tedy vratný, což je spor s předpokladem nevratnosti jednoho z jeho dílčích cyklů. Musí tedy platit $\eta_1 < \eta_2$. Proto při daných pracovních teplotách $\Theta_{\mathcal{A}}$ a $\Theta_{\mathcal{B}}$, $\Theta_{\mathcal{A}} > \Theta_{\mathcal{B}}$ označujeme účinnost vratného Carnotova cyklu jako $\eta_{\max}$. Protože $\eta < \eta_{\max}$, musí platit $\eta < 1$. Je zřejmé, že při rovnosti $\eta_{\max} = 1$ by ihned bylo možno konstruovat perpetuum mobile druhého druhu. Proto musí platit (2.10).
(Carnotova věta, tvořená první a druhou částí, je jen jednou z mnoha, ale historicky první formulací II. hlavní věty termodynamické.)

Pro uzavření nevratné termodynamické cesty $\mathcal{O}'$ je tedy třeba z látky $\mathcal{L}$ odvádět větší teplo $\Delta Q'_0$ než je teplo ΔQ_0 při cyklu vratném. Tedy

$$\Delta Q'_0 = \Delta Q_0 + \Delta Q_{0x} \tag{2.16}$$

Pro výslednou práci $\Delta A'$ nevratného Carnotova cyklu tedy podle (2.2) platí

$$\Delta A' = \Delta Q_W + (-\Delta Q'_0) = \Delta A - \Delta Q_{0x} \tag{2.17}$$

Pro (transformační) účinnost η nevratného Carnotova cyklu s pracovními teplotami T_W a T_0, $T_W \geq T_0 > 0$, podle její definice platí

$$\eta = \frac{\Delta A'}{\Delta Q_W} < \frac{\Delta A}{\Delta Q_W} = \frac{T_W - T_0}{T_W} = \eta_{\max} \tag{2.18}$$

Práce $\Delta A'$ v cyklu $\mathcal{O}'$ získaná tedy nestačí k převodu celého tepla $\Delta Q'_0$ z $\mathcal{B}$ do $\mathcal{A}$. Z (2.2), (2.17) a nerovnosti (2.18) vyplývá nerovnost

$$\frac{\Delta Q'_0}{\Delta Q_W} > \frac{T_0}{T_W} \tag{2.19}$$

Ve vratné části $\mathcal{O}$ cyklu $\mathcal{O}'$ platí (2.7), a tedy podle (2.16) a (2.19) v nevratném cyklu $\mathcal{O}'$ platí

$$\frac{\Delta Q_W}{\Delta T_W} + \left(-\frac{\Delta Q'_0}{T_0}\right) = -\frac{\Delta Q_{0x}}{T_0} < 0 \tag{2.20}$$

v obecnějším zápisu (tzv. Clausiova nerovnost) cesta!termodynamiká

$$\sum_{i \in \{W,0\}} \frac{\Delta Q(T_i)}{T_i} \triangleq \oint_{\mathcal{O}'} \frac{\delta Q(\Theta)}{\Theta} < 0, \quad \Delta Q(T_i) \triangleq \Delta Q_i \tag{2.21}$$

kde $\Delta Q(T_i)$ resp. $\delta Q(\Theta)$ označuje (všechna) tepla vratně (izotermicky) sdělená při teplotě T_i resp. Θ do/ze systému $\mathcal{L}$.

Vztahy (2.9) a (2.21) se také nazývají ***Kelvinova*** formulace II. hlavní věty termodynamické.

V případě nevratného Carnotova cyklu $\mathcal{O}'$ je tedy algebraický součet všech teplotně redukovaných tepel do cyklu přímo přivedených a z něj přímo odvedených, *Clausiův integrál* (2.21), menší než nula. To je způsobeno odvodem tepla ΔQ_{0x} z látky $\mathcal{L}$ (a to při teplotě T_0 do chladníku $\mathcal{B}$), jako důsledku požadavku cykličnosti *náhradní* [57] termodynamické cesty ($\mathcal{O}'$) změny stavu systému $\mathcal{L}$ (tedy i *opakovatelnosti* celého procesu).

Při izotermické kompresi při teplotě T_0 se v nevratném případě $\mathcal{O}'$ spotřebuje mechanická kinetická energie

$$\Delta E'_{\mathrm{K}_0} = \Delta E_{\mathrm{K}_0} + \Delta E_{\mathrm{K}_{0x}}$$

rovná teplu $\Delta Q'_0$ z (2.16). Platí

$$\Delta E_{\mathrm{K}_0} = \Delta Q_0 \ \text{ a } \ \Delta E_{\mathrm{K}_{0x}} = \Delta Q_{0x}$$

Energie ΔE_{K_0} je odebírána z mechanické potenciální energie $P_W = \Delta Q_W$ získané, stejně jako v samotném vratném případě $\mathcal{O}$, podél křivky l_0-l_1.

Energie $\Delta E_{\mathrm{K}_{0x}}$ je z pohledu celého průchodu $\mathcal{L}$ nevratným cyklem $\mathcal{O}'$ rovněž odebírána z mechanického výstupu ΔA jeho vratné části, tj. z výstupu cyklu $\mathcal{O}$. Platí tedy

$$\Delta A' = \oint_{O'} p \, \mathrm{d}v = \oint_{O'} \Theta \, \mathrm{d}S$$

$$\Delta A' = \Delta A - \Delta E_{\mathrm{K}_{0x}}$$

Nevratný Carnotův cyklus $\mathcal{O}'$ lze tedy považovat z hlediska práce $\Delta A'$ vykonané jedním průchodem systému $\mathcal{L}$ tímto cyklem za cyklus vratný ($\mathcal{O}$), doprovázený vznikem šumového tepla, $\Delta Q_{0x} > 0$. Teplo ΔQ_{0x}, vyskytující se v nevratném cyklu 'navíc', pak přechází do $\mathcal{B}$ kompresní prací o velikosti ΔK_{0x}, na úkor mechanické práce ΔA ze vztahu (2.2), vykonané ve vratné části $\mathcal{O}$ nevratného cyklu $\mathcal{O}'$. Lze si tak představit ještě jednu izotermickou kompresi $3'$ probíhající 'navíc' paralelně ke kompresi 3 na Obr. 2.1. Právě při ní se, 'navíc' vzhledem k vratnému cyklu $\mathcal{O}$, spotřebuje kompresní práce ΔK_{0x} odvádějící ekvivalentní šumové teplo ΔQ_{0x}.
Z hlediska odvodu tepla $\Delta Q'_0$ z látky $\mathcal{L}$ při jejím průchodu nevratným cyklem $\mathcal{O}'$ jej tedy lze považovat za *aditivní* superpozici vratné části, vratného cyklu $\mathcal{O}$ a nevratné části, tj. izotermické komprese $3'$ ('navíc').

Nevratnost je důsledkem neideálnosti látky $\mathcal{L}$ a konečné, nikoliv nulové rychlosti změn jejího stavu $\mathcal{L}$. (Stejně jako u každého jiného procesu, při němž je uvnitř námi sledované soustavy vyvíjeno teplo, např. třením, ztrátami na elektrickém odporu apod.) Říkáme, že dochází k *disipaci* tepla (ΔQ_{0x}) ve sledovavné soustavě, v našem případě v celém Carnotově stroji (chápaném jako izolovaná soustava).

Pokud $\Delta Q_{0x} = 0$, platí $\Delta A' = \Delta A$, $\eta = \eta_{\max}$ a cyklus je vratný.

Veličiny η, $\eta_{\max}$ označme dále souhrnně jako $\eta_{[max]}$. Je zřejmé, že

$$\lim_{\Delta Q_W \to \infty} \eta_{[max]} = \lim_{T_W \to \infty} \eta_{[max]} = 1 \tag{2.22}$$

Rovnost $\Delta Q_W = \Delta A = \Delta A'$ je tedy *limitní*, reálně *nedosažitelná*. Tehdy platí

$$\eta_{\max} = \frac{\Delta Q_W - \Delta Q_0}{\Delta Q_W} = \eta = \frac{\Delta Q_W - \Delta Q'_0}{\Delta Q_W} = \frac{\Delta A}{\Delta Q} = 1 \tag{2.23}$$

Lze tedy psát

$$0 \;\leq\; \eta < \eta_{\max} < 1, \quad T_W \geq T_0 > 0 \tag{2.24}$$

Protože podle (2.17), (2.18), (2.24) v nevratném Carnotově cyklu $\mathcal{O}'$ platí

$$\eta = \frac{\Delta Q_W - \Delta Q_0 - \Delta Q_{0x}}{\Delta Q_W} \geq 0 \tag{2.25}$$

musí také platit

$$\Delta Q_W \geq \Delta Q_0 + \Delta Q_{0x} \geq 0, \quad \text{a tedy} \quad \Delta Q_W - \Delta Q_0 \geq \Delta Q_{0x} \tag{2.26}$$

Ve vratném Carnotově cyklu $\mathcal{O}$ platí

$$\Delta Q_{0x} = 0, \quad \text{a tedy} \quad \Delta Q_W \geq \Delta Q_0 \geq 0, \quad T_W \geq T_0 > 0 \qquad (2.27)$$

V případě neplatnosti (2.26), (2.27) by platilo $\eta_{[max]} < 0$, což by byl spor s *I. hlavní větou termodynamickou* (zákon zachování energie).

3. Entropie

3.1 Informační entropie

S náhodným jevem ξ s pravděpodobnodtí výskytu $p(\xi)$, $0 < p(\xi) \leq 1$, je spojena *vlastní* informace, *informační množství* $\mathcal{I}$ definované rovností

$$\mathcal{I} \overset{\text{Def}}{=} -K \cdot \log_z p(\xi) \tag{3.1}$$

Veličinu i měříme v *informačních* jednotkách bit, resp. nat, resp. hartley, pokud v definici (3.1) použijeme $K = 1$ a $z = 2$, resp. $K = 1$ a $z = \mathrm{e}$, resp. $K = 1$ a $z = 10$. Lze ji také měřit v *termodynamických* jednotkách boltzmann při $K = k$ a $z = 10$ nebo clausius při $K = k$ a $z = \mathrm{e}$. Veličina k je Boltzmannova konstanta. Platí tedy $k \cdot \text{hartley} = \text{boltzmann}$ a $k \cdot \text{nat} = \text{clausius}$.
Uvažujme že náhodný jev ξ je *realizací diskrétní* náhodné veličiny Ξ definované jako uspořádaná dvojice

$$\Xi \overset{\text{Def}}{=} [\mathcal{X},\ \ p(\xi)]\,,\quad \xi \in \mathcal{X},\quad \sum_{\xi\in\mathcal{X}} p(\xi) = 1,\quad 0 \leq\ p(\xi)\ \leq\ 1 \tag{3.2}$$

Veličinu $\mathcal{X}$ nazýváme *výběrový prostor* náhodné veličiny Ξ. Samotnou takto definovanou veličinu Ξ pak nazýváme *výběrový pravděpodobnostní* prostor Ξ.
Střední hodnotu $\overline{J} \overset{\text{Def}}{=} E(J)$ náhodné veličiny J,

$$J = [\mathcal{I},\ p(\xi)] \tag{3.3}$$

jejíž hodnoty (realizace) jsou definovány v (3.1), při označení $\overline{J} \overset{\triangle}{=} H(\Xi)$ píšeme

$$H(\Xi) \overset{\text{Def}}{=} E[\mathcal{I},\ p(\xi)] \tag{3.4}$$

nazýváme *informační, Shannonovská* entropie diskrétní náhodné veličiny Ξ. Jedná se o *průměrné* informační množství připadající na (elementární) jev $\xi \in \mathcal{X}$. Z teorie pravděpodobnosti je střední hodnota (3.4) známa jako *absolutní míra neurčitosti* pravděpodobnostního *rozdělení* $p(\xi_i)$, $\xi_i \in \mathcal{X}$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Při označení $\xi \overset{\triangle}{=} \xi_i$ a $p(\xi_i) \overset{\triangle}{=} p_i$ je tedy definována vztahem

$$H(\Xi) \overset{\text{Def}}{=} -K\sum_{i=1}^{m} p_i \ln p_i \tag{3.5}$$

Veličina $H(\Xi)$ definovaná v (3.4) a (3.5) je tedy funkcí pravděpodobností p_j jevů ξ_j, $j = 1, 2, \ldots, N$ (reálnou funkcí N reálných proměnných). [Je rovněž *funkcionálem* na množině pravděpodobnostních rozdělení $p(\xi)$.] Lze ji definovat pro libovolnou diskrétní náhodnou veličinu.
Pro *spojitou* náhodnou veličinu Ξ definujeme *diferenciální* informační entropii [59].[2]
Informační množství definovaná vztahy (3.1), (3.4), (3.5) budeme dále měřit v jednotkách nat.

[2] Viz Dodatky 8.2.

3.1.1 Hartleyovo-Shannonovo zavedení informační entropie

Množství informace $\mathcal{I}$, obsažené ve *zprávě* (náhodném jevu $\xi \in \mathcal{X}$), je rostoucí nezápornou funkcí počtu $\tilde{P}$ *alternativ*, tj. počtu všech možných zpráv ξ [s obecně různými pravděpodobnostmi výskytu $p(\xi)$], které je *zdroj zpráv* Ξ (pozorovaná, měřená náhodná veličina Ξ) schopen vygenerovat. Definujeme jej takto:

$$\mathcal{I} \stackrel{\text{Def}}{=} f(\tilde{P}) \ \text{ resp. } \ \mathcal{I} \stackrel{\text{Def}}{=} -\ln p_\xi \tag{3.6}$$

Je zřejmé, že čím více zpráv (po sobě) obdržíme, tj. čím je výsledná zpráva *delší*, tím *větší* získáme množství informace $\mathcal{I}$. Definujeme tedy informaci $\mathcal{I}$ jako aditivní funkci délky zprávy [(např. počtu jejích ('elementárních') prvků)]. Nechť

$$\begin{array}{ll} \tilde{P} & \text{je počet všech zpráv (alternativ) } \xi \text{ generovaných zdrojem zpráv } \Xi \\ N & \text{je délka zprávy } \xi \text{ v počtu prvků } \textit{abecedy } I \text{ zdroje zpráv } \Xi,\ \ I \neq \emptyset, \\ m & \text{je počet prvků (znaků) abecedy } I \text{ zdroje zpráv } \Xi,\ \ m \leq N. \end{array} \tag{3.7}$$

Celkový počet $\tilde{P}$ zpráv ξ délky N je dán počtem variací N-té třídy ze souboru m prvků s opakováním,

$$\tilde{P} = m^N \tag{3.8}$$

Uvažujme zprávu ξ_1 o N_1 prvcích a zprávu ξ_2 o N_2 prvcích generované (diskrétním) zdrojem zpráv s abecedou o m znacích. Z N_1 prvků můžeme sestrojit $\tilde{P}_1 = m^{N_1}$ zpráv a z N_2 prvků $\tilde{P}_2 = m^{N_2}$ zpráv. Zpráva o $N = N_1 + N_2$ prvků nechť je jednou z celkvého počtu $\tilde{P}$ zpráv,

$$\tilde{P} = m^N = m^{N_1+N_2} = m^{N_1} m^{N_2} \tag{3.9}$$

uvažovaého zdroje Ξ. Potom $\mathcal{I}_1 = f(\tilde{P}_1)$ a $\mathcal{I}_2 = f(\tilde{P}_2)$. Při předpokládané aditivnosti informačního množství $\mathcal{I}$ máme

$$\mathcal{I} = f(\tilde{P}) = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 = f(\tilde{P}_1) + f(\tilde{P}_2) = f(m^{N_1+N_2}) = f(\tilde{P}_1\tilde{P}_2) \tag{3.10}$$

Lze předpokládat, že zpráva o N znacích se skládá z m částí o délkách

$$N_1 = N_2 = N_3 =,\ ...,\ N_l = n,\ \ 1 \leq l\ \leq\ N,\ \ 1 \leq n\ \leq\ N$$

Potom

$$\begin{aligned} \tilde{P}_i &= m^{N_i} = L,\ \ i = 1,\ ...,\ l \\ \tilde{P} &= m^{\left(\sum_i N_i\right)} = \prod_i \tilde{P}_i = L^l,\ \ L = m^n = \text{konst} \\ f(\tilde{P}) &= f(L^l) = l \cdot f(L) \end{aligned} \tag{3.11}$$

Poslední rovnici budeme (formálně) derivovat podle N a podle m,

$$\begin{aligned} \left[f(L^l)\right]_L^{'} &= f^{'}(L^l) \cdot lL^{l-1} = l \cdot f^{'}(L) \\ \left[f(L^l)\right]_l^{'} &= f^{'}(L^l) \cdot L^l \ln L = f(L) \end{aligned} \tag{3.12}$$

a podělením derivovaných rovnic získáme

$$L \ln L = \frac{f(L)}{f'(L)} \quad \text{a tedy} \quad \frac{f'(L)}{f(L)} = \frac{1}{L \ln L} \tag{3.13}$$

Řešením diferenciální rovnice

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x \ln x}, \quad \text{resp.} \quad \frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x}, \quad x > 1, \; y \neq 0$$

získáváme

$$y = K \cdot \ln x > 0, \quad K \in \mathrm{R}^+$$

a tedy

$$f(L) = K \cdot \ln L = K \cdot \ln m^n = K \cdot n \ln m \tag{3.14}$$

kde n je délka jedné podzprávy zprávy ξ; $N = l \cdot n$.
Pro $K = 1$ tak získáváme získáváme množství informace $\mathcal{I}$, kterým definujeme *Hartleyovu míru* informace ve zprávě o délce N,

$$\mathcal{I} = N \cdot \ln m \tag{3.15}$$

V tomto případě měly všechny zprávy stejnou praděpodobnost $p(i) = \dfrac{1}{m}$.
Zabývejme se nyní případem kdy pravděpodobnost znaků z I ve zprávě ξ je různá. Nechť N_i je počet výskytů i-tého znaku abecedy I zdroje zpráv Ξ, $i \in \{1, 2, \ ..., \ m\}$ ve zprávě ξ délky N. Tehdy platí

$$N = \sum_{i=1}^{m} N_i \tag{3.16}$$

Počet všech možných alternativ ξ generovaných uvažovaným zdrojem zpráv Ξ je pak dán počtem permutací s opakováním (ze souboru N prvků s N_i prvky stejnými),

$$\tilde{P} = \frac{N!}{\prod\limits_{i=1}^{m} N_i!}, \quad \sum_{i=1}^{m} N_i = N \tag{3.17}$$

Potom

$$\mathcal{I} = f(\tilde{P}) = \ln \frac{N!}{\prod\limits_{i=1}^{m} N_i} = \ln N! - \sum_{i=1}^{m} \ln N_i! \tag{3.18}$$

Pro dostatečně velká N a N_i lze použít Stirlingovu formuli

$$\ln N! = N \ln(N-1)$$

a při této aproximaci

$$\begin{aligned}
\ln \tilde{P} &= N(\ln N - 1) - \sum_{i=1}^{m} N_i(\ln N_i - 1) \\
&= N \ln N - N - \sum_{i=1}^{m} N_i \ln N_i + \sum_{i=1}^{m} N_i \\
&= \ln N \cdot \sum_{i=1}^{m} N_i - \sum_{i=1}^{m} N_i \ln N_i = -\sum_{i=1}^{m} N_i(\ln N_i - \ln N) \\
&= -\frac{N}{N} \sum_{i=1}^{m} N_i \ln \frac{N_i}{N} = -N \sum_{i=1}^{m} \frac{N_i}{N} \ln \frac{N_i}{N}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Tedy platí, že

$$\mathcal{I} = f(\tilde{P}) = -N \cdot \sum_{i=1}^{m} \frac{N_i}{N} \ln \frac{N_i}{N}, \quad m = \sum_{i=1}^{m} N_i \tag{3.20}$$

Průměrné množství informace připadající na jeden znak zprávy o m částech N_i je

$$\frac{\mathcal{I}}{N} = -\sum_{i=1}^{m} \frac{N_i}{N} \ln \frac{N_i}{N} \tag{3.21}$$

Pokud $\dfrac{N_i}{N} = \dfrac{1}{m}$ platí

$$\frac{\mathcal{I}}{N} = -\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{m} \ln \frac{1}{m} = \ln m \tag{3.22}$$

Interpretujeme-li výraz (relativní četnost) $\dfrac{N_i}{N}$ jako pravděpodobnost i-tého znaku abecedy I ve zprávě ξ, $p(i) \stackrel{\text{Def}}{=} \dfrac{N_i}{N}$, pak průměrným informačním množstvím ve znaku zprávy definujeme *informační*, též *Shannonovskou* entropii diskrétního zdroje zpráv Ξ

$$H(\Xi) \stackrel{\text{Def}}{=} -\sum_{i=1}^{m} p_i \ln p_i \tag{3.23}$$

což je definice (3.5). Zdůvodnili jsme tak zavedení této definice.

3.2 Termodynamická entropie

3.2.1 Definice entropie v klasické termodynamice

S libovolným termodynamickým systémem $\mathcal{A}$ v *rovnovážném* (termodynamickém) stavu, (termodynamickém) *ekvilibriu*, je asociována *makroskopická (globální, extenzivní)* a tedy i *aditivní* veličina [56] nazývaná *termodynamická (tepelná, Clausiova)* entropie, označovaná jako S.

Rovnovážný, *equilibriální* stav systému $\mathcal{A}$ je popsán stavovou rovnicí (jednou z možných [27])

$$pV = kN\Theta, \tag{3.24}$$

kde p, V, N a Θ jsou *stavové* veličiny *tlak*, *objem*, *počet částic* systému a jeho *termodynamická teplota* (ve stupních Kelvinových, K). Veličiny p a Θ jsou veličiny *intenzivní (vnitřní)* [56], veličiny V a N jsou extenzivní (*vnější*), k je *Boltzmannova konstanta*.

Definicí *makroskopické (fenomenologické, klasické)* rovnovážné termodynamiky je ale určena jen její *rovnovážná* změna ΔS, vyvolaná *vratnou (kvazistacionární)* [31] výměnou tepla Δq při konstantní termodynamické teplotě Θ mezi tímto systémem a jeho *okolím* nebo jinou změnou [3] tepla Δq, vratně vyjádřitelnou při teplotě Θ [27, 38]. Tato změna je popsána Clausiovou definiční rovnicí

$$\Delta S \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{\Delta q}{\Theta}, \quad \Theta > 0 \tag{3.25}$$

Například se jedná o vratnou výměnu tepla Δq při $\Theta =$ konst mezi systémem a jeho okolím při (vratné) izotermické změně (rovnovážného) stavu uvažovaného systému. Integrací výrazu $\mathrm{d}S \stackrel{\triangle}{=} \Delta S$, když $\delta q \stackrel{\triangle}{=} \Delta Q$, lze tedy určit entropii S až na aditivní integrační konstantu S_0. Pro entropii S jako funkci teploty Θ má tedy platit

$$S = \int \frac{\delta q}{\Theta} = \sigma(\Theta) + S_0 \tag{3.26}$$

Veličina S_0 je nenulová konstanta nezávislá na stavových veličinách systému, ale závislá na látkovém množství systému, tedy $S_0 \stackrel{\triangle}{=} S_0(n)$, n je počet jednotkových látkových množství (mol, kmol) systému, $n \stackrel{\text{Def}}{=} \dfrac{N}{N_A}$, N_A je *Avogadrova* konstanta. Nerespektování této skutečnosti, $S_0 \neq 0$, vede k tzv. *Gibbsovu paradoxu*.

3.2.2 Gibbsův paradox a jeho řešení

Gibbsův paradox spočívá v tom, že pouhým myšlenkovým předělením systému, tedy beze změny jeho termodynamických (makroskopických) vlastností, získáváme nenulový rozdíl termodynamických entropií systému před jeho 'rozdělením' a po něm.[4]

Uvažujme nyní rovnovážný termodynamický systém $\mathcal{A}$ o n jednotkových látkových množstvích ideálního plynu. Pro něj přesně platí stavová rovnice (3.24),

$$pV = nR\Theta \tag{3.27}$$

[3] Na celkovou entropii systému lze pohlížet jako na definovanou jen možností takových změn zahrnujících jeho celkové teplo.

[4] Takovýmto rozdělením systému na m částí na něm vlastně definujeme informační zdroj s hodnotou informační entropie maximálně $\ln m$.

kde R je *molární plynová konstanta*, $R = kN_A$ a k je *Boltzmannova konstanta.* Pro vnitřní energii U tohoto systému platí

$$\mathrm{d}U = nc_v\ \mathrm{d}\Theta \tag{3.28}$$

kde c_v je *molární teplo* za stálého objemu.
Z definiční rovnice (3.25), ze stavové rovnice (3.27) a z I. hlavní věty termodynamické [pro (náhradní) kvazistacionární výměnu tepla δq mezi tímto systémem a jeho okolím],

$$\delta q = \ \mathrm{d}U + p\ \mathrm{d}V \tag{3.29}$$

vyplývá, že

$$\mathrm{d}S = n\left(c_v\frac{\mathrm{d}\Theta}{\Theta} + R\frac{\mathrm{d}V}{V}\right) \tag{3.30}$$

Extenzivita (aditivita vzhledem k látkovému množství) tepelné entropie S systému v rovnovážném stavu (termodynamickém ekvilibriu) je z tohoto vztahu zřejmá;

$$S = n\int\left(c_v\frac{\mathrm{d}\Theta}{\Theta} + R\frac{\mathrm{d}V}{V}\right) = \sigma(\Theta, V) + S_0(n) \tag{3.31}$$

a tedy

$$\begin{aligned} \sigma(\Theta, V) &= n\left(c_v \ln\Theta + R\ln V\right) \\ S &= n\left(c_v \ln\Theta + R\ln V\right) + S_0(n) \end{aligned} \tag{3.32}$$

Systém $\mathcal{A}$ v rovnovážném stavu, resp. objem V [nebo jistý jiný jeho (stavový) prostor[5]] jím v tomto stavu zaujímaný, rozdělme přepážkami, *diafragmami*, nekonečně tenkými (myšlenými) a nijak neovlivňujícími jeho termodynamické vlastnosti na m částí, $\mathcal{A}_i$, $i \in \{1,\ ...,\ m\}$, $m \geq 1$, o objemech V_i s látkovými množstvími n_i,

$$V = \sum_{i=1}^{m} V_i, \quad n = \sum_{i=1}^{m} n_i \tag{3.33}$$

Položme

$$S_0(n) = 0 \ \text{ pro libovolné } n, \ \text{ a tedy i } \ S_{0i}(n_i) = 0 \tag{3.34}$$

Potom pro entropie S_i částí $\mathcal{A}_i$ celého systému $\mathcal{A}$, uvažovaných samostatně, bude platit

$$S_i = \sigma_i = n_i\left(c_v \ln\Theta + R\ln V_i\right) \tag{3.35}$$

[5]Stavový prostor je definován těmi veličinami, které na systému pozorujeme (obecněji jde o uspořádanou n-tici stavových veličin [poloha, hybnost, energie, ...]), viz Dodatky 8.3. Jeho objem je dán velikostí té izolované soustavy, kterou může pozorovaný systém zaujmout. Dělení tohoto objemu na buňky, 'popis' pozorovaného (prostoru) systému je určeno (zvolenou) přesností našeho pozorování, našimi znalostmi o jeho (možné vnitřní) struktuře.

a tedy jejich součet bude

$$\sum_{i=1}^{m} S_i = \sum_{i=1}^{m} \sigma_i = nc_v \ln\Theta + R \ln\left(\prod_{i=1}^{m} V_i^{n_i}\right). \tag{3.36}$$

Pro rozdíl $\Delta S = S - \sum_i S_i$ pak podle (3.32), (3.33), (3.34) a (3.35) platí

$$\Delta S = S - \sum_{i=1}^{m} S_i = \sigma - \sum_{i=1}^{m} (\sigma_i) = \Delta\sigma = R \ln \frac{V^n}{\prod_{i=1}^{m} V_i^{n_i}} = -nR \sum_{i=1}^{m} \frac{n_i}{n} \ln \frac{n_i}{n} > 0 \tag{3.37}$$

Ze stavových rovnic (3.27) našich systémů $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_i$ vyjádříme objemy V, V_i a při $p = p_i$ a $\Theta = \Theta_i$ získáváme vztahy

$$\sigma \;=\; Rn \ln n, \quad \sigma_i = Rn_i \ln n_i \tag{3.38}$$

a tedy

$$\Delta S = S - \sum_{i=1}^{m} S_i = \sigma - \sum_{i=1}^{m} (\sigma_i) > 0$$

Po úpravě[6]

$$\Delta S \;=\; \Delta\sigma = \sigma - \sum_{i=1}^{m} (\sigma_i) = R \ln \frac{V^n}{\prod_{i=1}^{m} V_i^{n_i}} = -nR \sum_{i=1}^{m} \frac{n_i}{n} \ln \frac{n_i}{n} \tag{3.39}$$

a při označení

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{n_i}{n} \ln \frac{n_i}{n} \triangleq B, \quad B < 0$$

získáváme

$$\Delta S \;=\; -nRB \;>\; 0$$

Předcházející výsledky jsou ovšem paradoxem, sporem s předpokladem neovlivnění termodynamického stavu systému myšlenou diafragmou a vedou k tomu důsledku, že tepelná entropie systému v *rovnovážném stavu není extenzivní* veličinou, což ale

[6]Veličina $-B$ vyjádřená v této úpravě je informační entropií zdroje zpráv s abecedou $\{n_i\}$ a rozdělením pravděpodobnosti $\left[\frac{n_i}{n}\right]_i$. Vyjadřuje naším pozorováním (umístěním diafragem) zjištěnou informační entropii na jednu částici, $-B = \frac{\Delta S}{kN}$; v termodynamických jednotkách je to $-kB = \frac{\Delta S}{N}$, k je Boltzmannova konstanta.

podle (3.30) *není* pravda. Proto je třeba uvažovat *nenulové* integrační konstanty $S_0(n)$, $S_{0i}(n_i)$, tak aby pro entropie $S,\ S_i$ platilo

$$\Delta S \ = \ S - \sum_{i=1}^{m} S_i = 0 \tag{3.40}$$

resp. aby platilo

$$\Delta S = \Delta S_{01m} + \Delta\sigma = 0,\ \text{ kde }\ \Delta S_{01m} = S_0 - \sum_{i=1}^{m} S_{0i} \neq 0,\quad S_0,\ S_{0i}$$

Podle (3.31), (3.32) a (3.40) tedy musí platit

$$\Delta S \ = \ (\sigma + S_0) - \sum_{i=1}^{m}(\sigma_i + S_{0i}) = 0 \tag{3.41}$$

$$\Delta S \ = \ [nR\ln n + S_0(n)] - \sum_{i=1}^{m}[n_iR\ln n_i + S_{0i}(n_i)] = 0$$

a tudíž

$$nR\ln n + S_0(n) = \sum_{i=1}^{m}[n_iR\ln n_i + S_{0i}(n_i)] \tag{3.42}$$

Tato rovnice má ale řešení tvaru

$$S_0(n) \ = \ -nR\ln n + \alpha n,\ \ \alpha \neq 0,\ \ \text{potom} \tag{3.43}$$

$$\alpha \ = \ \sum_{i=1}^{m}\left[\frac{n_i}{n}R\ln n_i + \frac{S_{0i}(n_i)}{n}\right] = \left[\frac{n}{n}R\ln n + \frac{S_0(n)}{n}\right]$$

V jiném zápisu[7] můžeme psát

$$S_0(n) = -nR\ln\frac{n}{\gamma},\ \ \text{kde}\ \ \alpha = R\ln\gamma,\ \ \gamma > 0 \tag{3.44}$$

Je zřejmé, že budeme-li uvažovat části $\mathcal{A}_i$ systému samostatně, bude pro n_i platit,

$$S_{0i}(n_i) = -n_iR\ln\frac{n_i}{\gamma_1} \tag{3.45}$$

Pro Clausiem definovanou entropii zavedeme označení

$$S \stackrel{\triangle}{=} S_{\text{Claus}},\ S_{\text{Claus}} > 0 \tag{3.46}$$

Při tomto označení tedy platí

$$S_{\text{Claus}} = \sigma + S_0(n) = nR\ln n - nR\ln\frac{n}{\gamma} = nR\ln\gamma\ \ \text{a tedy,} \tag{3.47}$$

[7]Konstanty α resp. γ nezávisejí ani na stavových proměnných systému, ale na množství jeho látky.

$$S_{\mathrm{Claus}} = nR\ln\gamma, \quad \ln\gamma > 0 \ \Rightarrow \ \gamma > 1 \tag{3.48}$$

Je zřejmé, že pro části $\mathcal{A}_i$ systému $\mathcal{A}$, $i = 1,\ ...,\ m$, lze psát

$$S_{\mathrm{Claus},i} \quad = \quad \sigma_i + S_{01}(n_i) = n_i R\ln n_i - n_i R\ln\frac{n_i}{\gamma_i} = n_i R\ln\gamma_i \tag{3.49}$$

Je pak zřejmé, že

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{Claus}} &= \sum_{i=1}^{m} S_{\mathrm{Claus},i}, \qquad (3.50)\\ nR\ln\gamma &= \sum_{i=1}^{m} n_i R\ln\gamma_i \\ n\ln\gamma &= \sum_{i=1}^{m} n_i \ln\gamma_i \\ \gamma^n &= \prod_{i=1}^{m} {\gamma_i}^{n_i} \end{aligned}$$

a protože

$$n = \sum_{i=1}^{m} n_i, \quad \gamma = \gamma_i, \ i = 1,\ ...,\ m$$

pak je

$$\Delta S = \Delta S_{\mathrm{Claus}} = nR\ln\gamma - \sum_{i=1}^{m} n_i R\ln\gamma_i = 0$$

Pro hodnotu entropie S_{Claus} na jednu částici systému $\mathcal{A}$ platí

$$\frac{S_{\mathrm{Claus}}}{nN_A} = k\ln\gamma \tag{3.51}$$

Pro teplo Q obsažené v ekvilibriálním systému o objemu V_0 při teplotě Θ platí[8]

$$Q = \int_{V_0} \delta q(\Theta, V) \tag{3.52}$$

a proto pro jeho entropii $S \cong S_{\mathrm{Claus}}$, v důsledku extenzivity tepelné entropie systému (v rovnovážném stavu, při teplotě Θ), musí platit

$$S_{\mathrm{Claus}} = \int_{V_0} \frac{\delta q(\Theta, V)}{\Theta} = \frac{Q}{\Theta} \tag{3.53}$$

Potom, podle (3.51) a (3.53)

$$S_{\mathrm{Claus}} \quad = \quad kN\ln\gamma = \frac{Q}{\Theta}, \quad \ln\gamma = \frac{Q}{\Theta\cdot kN} \tag{3.54}$$

[8] Jedná se o celkové teplo, které systém můž při teplotě Θ se svým okolím vratně vyměnit.

a při $\varepsilon \triangleq \dfrac{Q}{N}$ píšeme

$$\ln\gamma = \frac{\varepsilon}{\Theta \cdot k}, \quad \gamma = \mathrm{e}^{\frac{\varepsilon}{k\Theta}}, \quad \frac{1}{\gamma} = \mathrm{e}^{\frac{-\varepsilon}{k\Theta}}$$

Poměr ε ve (3.54) vyjadůje skutečnost, že energie Q je v systému $\mathcal{A}$ v rovnovážném stavu rozložena rovnoměrně na každou jeho částici (stejně po všech jeho stejně velkých částech).[9]

3.2.3 Pojem makrostav a mikrostav

Stav termodynamického systému ve *statistické* termodynamice nazýváme *makrostav.* V *rovnovážné* statistické termodynamice hovoříme o rovnovážných (makro)stavech.

Makrostavem termodynamického systému $\mathcal{A}$, rovnovážným i nerovnovážným, rozumíme množinu všech jeho *mikrostavů*, množinu všech možných mikroskopických uspořádání jeho *konstituentů* (částic, látkových množství) ve všech částech, *buňkách* (námi rozlišovaných, definovaných) celkově jím zaujímatelného (daného, námi sledovaného) *stavového prostoru* [celého objemu V *troj-rozměrného polohového* prostoru, *zobecněného polohového (konfiguračního)* prostoru, *hybnostního (impulsového)* prostoru nebo celého *fázového* prostoru] [44], dále jen *prostoru*, která jsou makroskopicky (termodynamicky, fenomenologicky) *vzájemně nerozlišitelná.*

Mohutnost $\tilde{P}$ této množiny, třídy ekvivalence na množině všech možných mikrostavů systému $\mathcal{A}$ [lépe řečeno, mikrostavů celého prostoru izolované soustavy s uvažovaným systémem] nazýváme *termodynanická pravděpodobnost* daného makrostavu.

Pojem makrostav tedy označuje *makroskopicky* (fenomenologicky) *rozlišitelný způsob* obsazení buněk celého toho prostoru, který je systému $\mathcal{A}$, např. ideálnímu plynu, 'dán k dispozici' [celého toho prostoru, který je tímto systémem během jeho (možného) časového vývoje zaujímatelný].

Pojmem mikrostav rozumíme tedy jedno z možných uspořádání jeho konstituentů (částic nebo skupin částic, tedy látkových množství systému), jímž je realizováno jedno možné obsazení jednotlivých, námi rozlišovaných buněk daného prostoru. Jednotlivé konstituentůy (např. částice) jsou vzájemně makroskopicky nerozlišitelné.

Mikrostav je tedy jedna z možných realizací makrostavu a makrostav je pak množina všech těchto svých, makroskopicky nerozlišitelných realizací.

Části termodynamického systému v jednotlivých, námi rozlišovaných buňkách daného stavového prostoru příslušné celkové (izolované) soustavy ale vždy uvažujeme v rovnovážném stavu, termodynamickém ekvilibriu [výskyt látkového množství, částice, ve všech částech příslušné buňky je stejně pravděpodobný]. I když celková

[9]Veličina $\dfrac{1}{\gamma}$ ve (3.54) je parametrem mikrokanonického rozdělení pravděpodobnosti (*statistiky*) částic systému v rovnovážném stavu (např. rozdělení Maxwell-Boltzmannovo).

(izolovaná) soustava, určená systémem a jeho okolím v rámci této soustavy tímto systémem zujímatelným, je ve stavu *nerovnovážném* při téže teplotě nebo různých teplotách. Buňky stavového prostoru pak chápeme jako by byly obsazeny samostatnými, rovnovážnými termodynamickými systémy a s nimi je i ztotožňujeme.

Nerovnážný stav systému, resp. daného prostoru systémem zaujímatelného je pak dán vzájemně různými rovnovážnými stavy částí systému v jednotlivých buňkách (daných námi rozlišovaným dělením) tohoto (stavového) prostoru.
Lze hovořit i o rovnoměrném nebo nerovnoměrném rozdělení pravděpodobnosti obsazení (výběru) buňek uvažovaného prostoru uvažovanými konstituenty.

3.2.4 Definice entropie ve statistické termodynamice

bunňka!námi rozlišovaná Je-li m počet námi rozlišovaných buňek celkového objemu zaujímatelného sledova-
ným systémem (např. ideálním plynem), M celkový počet jeho částic nebo látkových množství a je-li m_i, $0 \leq m_i \leq M$, počet částic nebo látkových množství v buňce i daného (objemu) uvažovaného prostoru, $1 \leq i \leq m$, je příslušná termodynamická pravděpodobnost $\tilde{P}$ tohoto makrostavu dána počtem permutací (s opakováním ze souboru n prvků s m_i prvky stejnými, $i = 1, \ ..., \ m$),

$$\tilde{P} = \frac{M!}{\prod\limits_{i=1}^{m} m_i!}, \ \ \sum_{i=1}^{m} m_i = M \tag{3.55}$$

Je-li Γ celkový, dostatečně velký, počet mikrostavů systému, tj. M je dostatečně velké, lze pro *pravděpodobnosti*, resp. *relativní četnosti* P a P_0 dvou makrostavů psát

$$P = \frac{\tilde{P}}{\Gamma}, \ P_0 = \frac{\tilde{P}_0}{\Gamma} \tag{3.56}$$

Podle Boltzmannova *předpokladu* [31] pro entropii S systému $\mathcal{A}$ v makrostavu s termodynamickou pravděpodobností $\tilde{P}$ (obecně nerovnovážném, složeném z rovnovážných subsystémů) platí

$$S = f(\tilde{P}) \tag{3.57}$$

kde f je nezáporná rostoucí funkce.
Pro vzájemně neinteragující (sub)systémy $\mathcal{A}_i$ ve stavech $\boldsymbol{\theta}_i$, $i = 1, \ ..., \ m$, při stejné teplotě Θ nebo různých teplotách Θ_i, s entropiemi

$$S_i = f(\tilde{P}_i) \tag{3.58}$$

platí[10]

$$S = f(\tilde{P}) = \sum_{i=1}^{m} S_i \tag{3.59}$$

[10]Stejný zápis by tedy platil i pro podsystémy $\mathcal{A}_i$ 'vzniklé' myšlenkovým předělením celého systému v rovnovážném stavu, jak bylo popsáno v odst. 3.3.2.

Termodynamická pravděpodobnost je ale *multiplikativní* veličinou, a proto

$$\prod_{i=1}^{m} \tilde{P} = \tilde{P}_i \tag{3.60}$$

Potom klademe

$$S = K \cdot \ln \tilde{P} + C, \quad C \geq 0 \tag{3.61}$$

Pro přírůstek entropie $\Delta S = S - S_0$, vzniklý (*náhradním vratným*[11] [57]) přechodem systému $\mathcal{A}$ mezi stavy $\boldsymbol{\theta}_0$ a $\boldsymbol{\theta}$, platí

$$\Delta S = S - S_0 = K \cdot \ln \frac{\tilde{P}}{\tilde{P}_0} \ \text{ nebo, podle (3.56), } \ \Delta S = K \cdot \ln \frac{P}{P_0} \tag{3.62}$$

Multiplikativní konstanta $K = k$, k je Boltzmannova konstanta určená z *Gay-Lussacova* pokusu (izotermická expanze do vakua)[12] [31].

Je-li S_0 entropie referenčního stavu systému $\mathcal{A}$ (např. *metastabilního* makrostavu, dočasně stabilního, vytvořeného třeba odstranitenou přepážkou na počátku jeho expanze, časového vývoje v širší izolované soustavě), pro nějž platí $\tilde{P}_0 = 1$, platí

$$S = k \cdot \ln \tilde{P}; \tag{3.63}$$

Vztah (3.63) je *statistickou*, tzv. *Boltzmannovou*, definicí termodynamické entropie; zavedeme v něm označení $S \stackrel{\triangle}{=} S_{\mathrm{Boltz}}$.

Označme jako N a N_j počty částic systému, $\sum_{j=1}^{m} N_j = N$, $N_j = n_j N_A$, $N = nN_A$.

Podle (3.63) platí

$$S_{\mathrm{Boltz}} = k \left(\ln N! - \sum_{j=1}^{m} \ln N_j! \right) \tag{3.64}$$

Při dostečně velkých N a N_j použijeme Stirlingův vzorec $N! = \left(\frac{N}{\mathrm{e}}\right)^N$ a píšeme

$$S_{\mathrm{Boltz}} = kN\left(\ln N - 1\right) - k\sum_{j=1}^{m} N_j \left(\ln N_j - 1\right) = -kN \sum_{j=1}^{m} \frac{N_j}{N} \ln \frac{N_j}{N} \tag{3.65}$$

Pro Boltzmannem definovanou entropii na jednu částici tedy platí

$$\frac{S_{\mathrm{Boltz}}}{N} = -k \sum_{j=1}^{m} \frac{N_j}{N} \ln \frac{N_j}{N} \tag{3.66}$$

[11] Viz Dodatky 8.3.

[12] Viz Dodatky 8.4.

Suma na pravé straně posledního vztahu je funkcí pravděpodobností.[13] Nazýváme ji *Boltzmannova funkce* statistické fyziky a bývá označována jako H. Vzhledem k dalšímu ji ale označíme jako B, viz také (3.39). Tedy

$$B \overset{\text{Def}}{=} \sum_{j=1}^{m} \frac{N_j}{N} \ln \frac{N_j}{N} \tag{3.67}$$

Při označení

$$B_{\text{Boltz}} \triangleq B \tag{3.68}$$

$$\frac{S_{\text{Boltz}}}{N} = -kB_{\text{Boltz}}, \quad \text{a podle (3.63)}, \quad \ln \tilde{P} = -NB_{\text{Boltz}} \tag{3.69}$$

Termodynamický systém $\mathcal{A}$ v rovnovážném stavu při teplotě Θ ztotožňujeme s jeho celým stavovým prostorem (např. objemem V systémem zaujímatelným, v tomto stavu skutečně zaujímaným) rozděleným na 'jednočásticové' buňky (v rovnovážném stavu systému obsahují právě jednu částici) s rovnoměrným rozdělením pravděpodobnosti jejich obsazení (výběru, rozlišení), $\left[\frac{N_j}{N}\right]_j = \left[\frac{1}{N}\right]_j$, $j = 1, ..., N$, $m = N$. Na tomto prostoru pak definujeme veličiny B^*, $P*$, S^*,

$$B^* \triangleq \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{N} \ln \frac{1}{N} = -\ln N = \frac{-1}{N} \ln \tilde{P}*, \quad S^* = -kNB^* \tag{3.70}$$

Hodnota Boltzmannovy entropie S_{Boltz} je tedy závislá na časovém vývoji systému a také na jemnosti našeho dělení pozorovaného prostoru v němž k tomuto vývoji dochází na buňky. Platí tedy, že $S^* = \max\limits_{\{m\}}\{S_{\text{Boltz}}\}$.

3.2.5 Termodynamická entropie Boltzmannova a Clausiova

Vraťme se k našemu myšlenkovému pokusu s diafragmou z odst. 3.2.2 a prozkoumejme z tohoto hlediska entropii S koncového rovnovážného stavu systému z Guy-Lussacova pokusu. Platí

$$\Theta = \text{konst a } n = \frac{N}{N_A}, \; n_i = \frac{N_i}{N_A}, \quad i = 1, \; ..., \; m$$

kde m je nyní dáno obecným umístěním přepážek, diafragem. Vyjádříme-li konstanty $S_0(n)$, $S_{0i}(n_i)$ výrazy (3.44) a (3.45), tj. pomocí konstant γ, γ_i, máme

$$S_0(n) = -nR \ln \frac{n}{\gamma}, \quad S_{01}(n_i) = -n_i R \ln \frac{n_i}{\gamma_i} \tag{3.71}$$

[13] Je i *funkcionálem* na množině rozdělení pravděpodobností $\left[\frac{N_j}{N}\right]_{j=1}^{m}$, $m \in \mathbf{N}$, definovaném na všech m námi rozlišovaných buňkách daného stavového prostoru.

a získáme, podle (3.32), (3.39), (3.40), (3.42) a (3.71), vztahy

$$\begin{aligned}
S &= \sigma + S_0, \quad S_i = \sigma_i + S_{0i}, \qquad (3.72)\\
\Delta S &= S - \sum_{i=1}^{m} S_i \\
\Delta S &= (\sigma + S_0) - \sum_{i=1}^{m} (\sigma_i + S_{0i}) = 0 \\
(\sigma + S_0) &= \sum_{i=1}^{m} (\sigma_i + S_{0i}) \\
\sigma &= -S_0 + \sum_{i=1}^{m} (\sigma_1 + S_{01}) \\
\Delta\sigma = \sigma - \sum_{i=1}^{m} \sigma_i &= -S_0 + \sum_{i=1}^{m} S_{0i} = -\Delta S_{01m} \\
\Delta\sigma &= -nR \sum_{i=1}^{m} \frac{n_i}{n} \ln \frac{n_i}{n} = -\Delta S_{01m}, \\
-nR \sum_{i=1}^{m} \frac{n_i}{n} \ln \frac{n_i}{n} &= nR \ln \frac{n}{\gamma} - \sum_{i=1}^{m} n_i R \ln \frac{n_i}{\gamma_i}
\end{aligned}$$

Úpravou posledního řádku získáme následující rovnosti:

$$-n \sum_i \frac{n_i}{n} \ln \frac{n_i}{n} = \left(n \ln n - \sum_{i=1}^{m} n_i \ln n_1 \right) - n \ln \gamma + \sum_{i=1}^{m} n_i \ln \gamma_1, \qquad (3.73)$$

$$-n \sum_i \frac{n_i}{n} \ln \frac{n_i}{n} = -n \sum_i \frac{n_i}{n} \ln \frac{n_i}{n} - n \ln \gamma + \sum_{i=1}^{m} n_i \ln \gamma_i$$

Je tedy zřejmé, že

$$-n \ln \gamma + \sum_{i=1}^{m} n_i \ln \gamma_1 = 0 \qquad (3.74)$$

Protože $N = nN_A$ a $N_i = n_i N_A$, platí

$$\left[\frac{n_i}{n} \right]_i \equiv \left[\frac{N_i}{N} \right]_i \qquad (3.75)$$

Zřejmě také, shodně s (3.50) a podle (3.54) a (3.75) platí, že

$$\begin{aligned}
n \ln \gamma &= \sum_{i=1}^{m} n_i \ln \gamma_i \qquad (3.76)\\
\gamma^n &= \prod_{i=1}^{m} {\gamma_i}^{n_i}, \quad n = \sum_{i=1}^{m} n_i
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{N}{N_A}\ln\gamma &= \sum_{i=1}^{m}\frac{N_i}{N_A}\ln\gamma_i \\
\gamma^N &= \prod_{i=1}^{m}\gamma_i{}^{N_i}, \quad N=\sum_{i=1}^{m}N_i
\end{aligned}
$$

a shodně s (3.54)

$$
\gamma=\gamma_i=\mathrm{e}^{\frac{\varepsilon}{\Theta\cdot k}}, \quad \varepsilon=\frac{Q}{N}=\frac{Q_i}{N_i}=\text{konst}
$$

což je důsledek extenzivity tepla a toho, že se celý systém nachází v rovnovážném stavu při teplotě Θ.

Má-li tedy systém N částic a je-li v rovnovážném stavu při teplotě Θ, je ε energií každé jeho částice; každá jednočásticová buňka daného stavového prostoru nese energii právě ε. Buňky jsou tak vzájemně nerozlišitelné, mají stejnou pravděpodobnost výběru pozorovatelem systému.

Rozdělení pravděpodobnosti výběru (energetického 'obsahu') i-té buňky, našimi diafragmami strukturovaného, daného stavového prostoru [tedy na množině námi rozlišovaných buněk tohoto prostoru, definovaných tímto 'popisem' (domělé struktury) rovnovážného systému pro naše pozorování] N_i částicemi je dáno výrazem $\dfrac{N_i}{N}$, $i=1,\ \ldots,\ m$. V případě nejjemnějšího možného popisu ($m=N$) pozorovaného ekvilibriálního systému tedy platí, že $\dfrac{N_i}{N}=\dfrac{1}{N}$, $i=1,\ \ldots,\ N$ a také $N_j=1,\ j=1,\ \ldots,\ N$ a tedy také, že $\dfrac{N_i}{N}=\dfrac{N_j}{N}=\dfrac{1}{N}$.
Výběr námi definovaných buněk daného stavového prostoru rovnovážného systému, resp. jejich obsazení N_i částicemi, $i=1,\ \ldots,\ m,\ m\le N$, je náhodná veličina, jejíž *neurčitost*, též *informační entropie*, je dána výrazem

$$
-\sum_{i=1}^{m}\frac{N_i}{N}\ln\frac{N_i}{N}, \tag{3.77}
$$

tedy výrazem formálně shodným s Boltzmannovou funkcí B ze vztahu (3.67), kde jsme zavedli $B_{\text{Boltz}}\stackrel{\triangle}{=}B$ (pro rozdělení s indexem j).
Dále zavedeme označení

$$
-B_{\text{Gibbs}}\stackrel{\triangle}{=}-\sum_{i=1}^{m}\frac{N_i}{N}\ln\frac{N_i}{N} \tag{3.78}
$$

Ve vztazích (3.77) a (3.78) se jedná se o neurčitost $[-B_{\text{Gibbs}},\ H(\cdot)]$ z (3.23) obecně nerovnoměrného rozdělení pravděpodobnosti, které je definováno 'dělením' celého stavového prostoru (celé izolované soustavy) zaujímaného rovnovážným systémem $\mathcal{A}$ našimi, pozorovatelovými (myšlenými) přepážkami. [Tím definujeme i příslušné rozdělení pravděpodobnosti náhodného výběru těchto buněk (index i).]

Vztahem (3.67) je rovněž definována neurčitost $[-B_{\text{Boltz}},\ H(\cdot)]$ z (3.23) rozdělení pravděpodobnosti, obecně nerovnoměrného, definovaného časovým vývojem systému na všech (námi, pozorovatelem definovaných) buňkách celkového stavového prostoru (izolované soustavy, objemu V), který může systém během tohoto vývoje zaujmout.

Časový vývoj systému v daném prostoru s našimi 'přepážkami', buňkami, v každém okamžiku definuje jisté (obecně nerovnoměrné) rozdělení pravděpodobnosti obsazení buňky. To vyjadřujeme indexem j. (Obecně bychom mohli volit různá 'mřížoví' buněk jak v indexaci i, tak j.)

Dosáhne-li systém koncového a tedy rovnovážného stavu, zaujme všechny jednočásticové buňky po jedné částici a termodynamická entropie celého prostoru na jednu buňku (částici) je $-kB^*$. Pozorovatelovou 'mříží' (v indexu i) je ale v tomto okamžiku definováno

$$-B_{\text{Gibbs}} \leq B^*, \quad -B_{\text{Gibbs}} = -B_{\text{Boltz}} \tag{3.79}$$

(stejné rozdělení v indexech i a j).[14]

Až do tohoto okamžiku (v rámci pozorovatelovy mříže) v důsledku různosti obou uvažovaných rozdělení (index i pro pozorovatelovy buňky v ekvilibriu systému, index j pro obsazení pozorovatelových buněk časovým vývojem systému v daném okamžiku) platí $N_i \neq N_j, i = j \in \{1, \ , m\}$, takže

$$-B_{\text{Boltz}} < -B_{\text{Gibbs}} \leq -B^* \tag{3.80}$$

Hodnota entropie $-B_{\text{Gibbs}}$ i $-B_{\text{Boltz}}$ je tedy závislá na přesnosti pozorování, 'popisu' (prostoru) systému, daném maximální hodnotou m indexů $i, \ j$, počtem $m \leq N$ pozorovaných buněk, ale i jejich velikostí.

U $-B_{\text{Gibbs}}$ se jedná o pravděpodobnost zvolení buňky stavového prostoru pozorovaného rovnovážného systému *pozorovatelem* (rozdělení s indexem i).

U $-B_{\text{Boltz}}$ se jedná o pravděpodobnost 'výběru', obsazení (námi, pozorovatelem definované) buňky *vývojem* systému (rozdělení s indexem j).

Veličina $-B*$, zavedená vztahem (3.70), index j, má význam *maximální možné* neurčitosti rozdělení celkové energie Q po systému (s hodnotou ε na každou jednočásticovou buňku). V indexu i, (3.77) a (3.78), je to maximální možná neurčitost výběru, rozlišení buňky systému.

Časovým vývojem systému jsou tedy definována i ta rozdělení, která nejsou mys-

---

[14] Pozorujeme systém s celkovou termodynamickou entropií $S^* = \dfrac{Q}{\Theta} = kN \ln N = k \ln N^N$ [podle (3.101) je $\gamma = N$] a získáváme informaci na jednu částici
$-B_{\text{Gibbs}} = -\sum_i^m \dfrac{N_i}{N} \ln \dfrac{N_i}{N} \leq \ln N = \dfrac{Q}{kN\Theta} = \dfrac{\varepsilon}{k\Theta}.$

litelná při jeho pozorování v rovnovážném stavu; tedy na jeho 'vlastním', tzv. jednočásticovém prostoru (s indexem $w = 1, \ ..., \ N$), kde máme hodnotu

$$-B^* = -\sum_{w=1}^{N} \frac{1}{N} \ln \frac{1}{N} \tag{3.81}$$

a ve kterém definujeme veličinu $-B_{\text{Gibbs}}$ (index $i = 1, \ ..., \ m$) . Tedy

$$\{-B_{\text{Gibbs}}\} \subset \{-B_{\text{Boltz}}\} \tag{3.82}$$

Nicméně, pro množiny všech hodnot B_{Gibbs} a B_{Boltz} v (3.82), pro všechna možná dělení stavového prostoru zaujímatelného systémem, platí, že

$$\max\{-B_{\text{Gibbs}}\} = \max\{-B_{\text{Boltz}}\} = -B^* = \frac{S_{\text{Claus}}}{kN} \tag{3.83}$$

V našem případě pozorování (index i, $m \leq N$) systému v rovnovážném stavu, tedy když pro jeho 'vlastní' stavový prostor s jednočásticovými buňkami platí $N_w = 1, \quad w = j = 1, \ ..., \ N, \ \dfrac{N_w}{N} = \dfrac{N_j}{N} = \dfrac{1}{N},$ lze psát

$$-B_{\text{Gibbs}} \quad = \quad -\sum_{i=1}^{m} \frac{N_i}{N} \ln \frac{N_i}{N} = -\frac{1}{r} \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{N} \ln \frac{1}{N} = \frac{1}{r} \ln N = -\frac{1}{r} B*, \quad r \geq 1. \tag{3.84}$$

Zřejmě tedy platí, že maximální možné neurčitosti $-B^*$ výběru, rozlišení našich buněk rovnovážného systému dosahujeme, dělíme-li jimi prostor zaujímaný systémem rovnoměrně a při nejjemnějším možném jeho dělení,

$$\begin{aligned} \ln N \quad &\geq \quad -\sum_{i=1}^{m} \frac{N_i}{N} \ln \frac{N_i}{N} = -B_{\text{Gibbs}} \qquad (3.85) \\ \ln N \quad &= \quad -r \sum_{i=1}^{m} \frac{N_i}{N} \ln \frac{N_i}{N} = -r \cdot B_{\text{Gibbs}} = -B* \\ B* \quad &= \quad r \cdot B_{\text{Gibbs}}, \quad r \geq 1 \end{aligned}$$

Pro izolovanou soustavu (její stavový prostor), v níž probíhá vývoj (expanze) systému při teplotě Θ platí formálně stejně

$$\begin{aligned} \ln N \quad &\geq \quad -\sum_{j=1}^{m} \frac{N_j}{N} \ln \frac{N_j}{N} = -B_{\text{Boltz}} \qquad (3.86) \\ \ln N \quad &= \quad -r' \sum_{j=1}^{m} \frac{N_j}{N} \ln \frac{N_j}{N} = -r' \cdot B_{\text{Boltz}} = -B* \\ B* \quad &= \quad r' \cdot B_{\text{Boltz}}, \quad r' \geq 1 \end{aligned}$$

Zřejmě tedy platí, že

$$\frac{S_{\text{Gibbs}}}{S_{\text{Boltz}}} = \frac{r'}{r} = l \geq 1, \text{ a tedy } S^* = rl \cdot S_{\text{Boltz}} = \frac{r'}{l} S_{\text{Gibbs}} \tag{3.87}$$

Neurčitost $-B_{\text{Gibbs}}$ tedy dosáhne maximální hodnoty $-B*$ v koncovém, rovnovážném stavu systému a když platí $r' = r = 1$. Pak podle (3.85) a (3.86) je

$$S* = kN \cdot \ln N \quad = \quad -kN \cdot B* = -r \cdot kN \cdot B_{\text{Gibbs}}, \quad r \geq 1 \tag{3.88}$$

Protože

$$\frac{S*}{kN} = -r \cdot B_{\text{Gibbs}}, \quad kN = -\frac{S*}{r \cdot B_{\text{Gibbs}}} \tag{3.89}$$

a protože podle (3.53) a (3.54) platí $S_{\text{Claus}} = \dfrac{Q}{\Theta} = kN \cdot \ln \gamma$, lze psát

$$\begin{aligned} S_{\text{Claus}} &= -\frac{S*}{r \cdot B_{\text{Gibbs}}} \ln \gamma \\ \ln \gamma &= -r \cdot B_{\text{Gibbs}} \cdot \frac{S_{\text{Claus}}}{S*} = \frac{-r \cdot B_{\text{Gibbs}} Q}{\Theta \cdot kN \ln N} = \frac{\varepsilon}{k\Theta} \end{aligned} \tag{3.90}$$

Tedy

$$\begin{aligned} \ln \gamma = -s \cdot B_{\text{Gibbs}}, \quad s &\stackrel{\triangle}{=} \frac{r \cdot Q}{\Theta \cdot kN \ln N}, \quad s > 0 \\ \frac{s}{r} &= \frac{\ln \gamma}{\ln N} \end{aligned} \tag{3.91}$$

Uvažujeme-li pouze jednočásticové buňky námi rozlišovaného dělení daného stavového prostoru systému ('popisu' prostoru systému) v rovnovážném stavu, podle (3.84) platí $B^* = B_{\text{Gibbs}}$, a tedy $r = 1$, a tedy

$$s = \frac{Q}{\Theta \cdot kN \ln N} = \frac{S_{\text{Claus}}}{S*} = \frac{\ln \gamma}{\ln N} \tag{3.92}$$

Platí-li pak $s = 1$, je

$$S_{\text{Claus}} = S*, \ \text{ a tedy } \ \frac{Q}{\Theta} = kN \ln N, \ \text{ a tudíž } \ \frac{s}{r} = \frac{\ln \gamma}{\ln N} = 1 \tag{3.93}$$

Dále odvozujeme podrobněji:

$$\begin{aligned} \ln \gamma &= \frac{s}{r} \ln N, \quad \gamma = N^{\frac{s}{r}} = \mathrm{e}^{\frac{Q}{kN\Theta}}, \ \text{ viz rovnice (3.54)} \\ \frac{s}{r} \ln N &= \frac{Q}{kN\Theta}, \quad \frac{s}{r} = \frac{Q}{\Theta \cdot kN \cdot \ln N} = \frac{S_{\text{Claus}}}{S^*} \\ S_{\text{Claus}} &= \frac{s}{r} S^* = \frac{s}{r}(-rkN \cdot B_{\text{Gibbs}}) = -skN \cdot B_{\text{Gibbs}} = s \cdot S_{\text{Gibbs}} \end{aligned} \tag{3.94}$$

Zaveďme označení

$$s(1) \stackrel{\triangle}{=} 1 \ \text{ pro } \ r = 1 \ \text{ a } \ s(r) \stackrel{\triangle}{=} s \ \text{ pro } \ r \neq 1 \tag{3.95}$$

Potom

$$\ln\gamma = s(1)\cdot\ln N \quad \text{a} \quad S_{\text{Claus}} = s(1)\cdot S^* \tag{3.96}$$

a pro Clausiovu entropii ($S_{\text{Claus}} = \dfrac{Q}{\Theta} = \text{konst}$) platí

$$S_{\text{Claus}} = \frac{s(1)}{1}\cdot S^*, \quad \text{a také} \quad S_{\text{Claus}} = s(r)\cdot S_{\text{Gibbs}} \tag{3.97}$$

a tedy

$$1 \;=\; \frac{s(1)\cdot S^*}{s(r)\cdot S_{\text{Boltz}}} = \frac{S^*}{s(r)\cdot S_{\text{Gibbs}}} \tag{3.98}$$

Tedy

$$S^* = s(r)\cdot S_{\text{Gibbs}} \tag{3.99}$$

a položíme-li $s(r) = r$, viz rovnice (3.88), tedy $s = r$ pro všechna r, máme $\dfrac{s}{r} = 1$. Potom podle (3.54)

$$\begin{aligned} S_{\text{Claus}} = \frac{Q}{\Theta} = kN\ln\gamma \;&=\; kN\ln N = S^* \quad \text{a tedy} \quad \gamma = N > 1 \\ \mathrm{S}_{\text{Claus}} \;&=\; r\cdot S_{\text{Gibbs}} \end{aligned} \tag{3.100}$$

Ze vztahů (3.94) je také zřejmé, že při $\dfrac{s}{r} = 1$ platí $\gamma = N$, a proto

$$\mathrm{e}^{\frac{Q}{kN\Theta}} = \mathrm{e}^{\frac{\varepsilon}{k\Theta}} = N \tag{3.101}$$

V rovnovážném stavu systému a při jeho nejjemnějším možném 'popisu', pozorování [$max(i) = m = N$], bez jakýchkoli preferencí námi definovaných buněk tohoto 'pozorovacího' stavového prostoru, tedy platí $r = s = 1$, jinak $r = s \geq 1$.
Je tedy zřejmé, že B^* je Boltzmannovou funkcí B ze vztahu (3.67), definovanou na rozdělení pravděpodobnosti $\left[\dfrac{n_i}{n}\right]_i = \left[\dfrac{1}{N}\right]_i$ na množině N částic (n látkových množsví) v ekvilibriálním stavu; $-B^* = \max\{-B_{\text{Gibbs}}\}$.

Pro 'vlastní' vývoj systému ('o sobě samém') běžně uvažujeme jeho rozdělení na jednočásticové buňky, $j = 1, ..., N$. V koncovém, rovnovážném stavu pak platí $\left[\dfrac{n_j}{n}\right]_j = \left[\dfrac{1}{N}\right]_j$; $-B^* = \max\{-B_{\text{Boltz}}\}$.[15] Vzhledem k tomuto stavu pak provádíme naše pozorování, index i.

Pro hodnoty $B \stackrel{\triangle}{=} B_{\text{Boltz}}$, S_{Boltz} a B^*, S_{Claus}, musí podle vztahů (3.85) až (3.101) tedy se zjištěnou konstantou γ, platit

$$\begin{aligned} B^* \;&=\; r'B \\ S_{\text{Claus}} \;&=\; r'S_{\text{Boltz}}, \quad r' \geq 1 \end{aligned} \tag{3.102}$$

[15] Je zřejmé, že $\ln\gamma$ je Shannonovskou entropií rovnoměrného rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny s N realizacemi, $\left[\dfrac{n_i}{n}\right]_i = \left[\dfrac{1}{N}\right]_i$.

Důkaz: Podle předchozího položme

$$
\begin{aligned}
B^* &= r'B, \quad {B^*}_j = {r'}_j B_j, && (3.103)\\
-B &= \frac{1}{r'} \ln \gamma, \quad -B_j = \frac{1}{{r'}_j} \ln \gamma_j, \\
-B &= \frac{1}{N} \ln \tilde{P}, \quad -B_j = \frac{1}{N_j} \ln \tilde{P}_j, \\
\ln \gamma &= -B^*, \quad \ln \gamma_j = -{B^*}_j, \\
\ln \gamma &= \frac{r'}{N} \ln \tilde{P}, \quad \ln \gamma_j = \frac{{r'}_j}{N_j} \ln \tilde{P}_j, \quad j = 1, \ ..., \ m, \quad m \leq N
\end{aligned}
$$

Pro Clausiem definovanou entropii tedy platí

$$
\begin{aligned}
S_{\mathrm{Claus}} &= -nRB^* = nR \ln \gamma = \frac{nRr'}{N} \ln \tilde{P} = r'k \ln \tilde{P} \stackrel{\triangle}{=} r' S_{\mathrm{Boltz}} && (3.104)\\
\ln \tilde{P} &= \sum_{j=1}^{m} \ln \tilde{P}_j \\
S_{\mathrm{Claus},j} &= -n_j R {B^*}_j = n_j R \ln \gamma_j = \frac{n_j R {r'}_j}{N_j} \ln \tilde{P}_j = {r'}_j k \ln \tilde{P}_j \stackrel{\triangle}{=} {r'}_j S_{\mathrm{Boltz},j} \\
S_{\mathrm{Claus}} &= r'k \sum_{j=1}^{m} \ln \tilde{P}_j \quad \text{a} \quad S_{\mathrm{Claus}} = \sum_{j=1}^{m} {r'}_j k \ln \tilde{P}_j
\end{aligned}
$$

Tedy

$$
r' = {r'}_j, \quad \ln \gamma = \frac{r'}{N} \ln \tilde{P}, \quad \ln \gamma_j = \frac{r'}{N_j} \ln \tilde{P}_j \tag{3.105}
$$

a podle (3.60) a (3.63)

$$
S_{\mathrm{Claus}} = kN \ln \gamma = \sum_{j=1}^{m} kN_i \ln \gamma_j = r'k \sum_{j=1}^{m} \ln \tilde{P}_j = r'k \ln \tilde{P} \tag{3.106}
$$

Tedy skutečně platí $S_{\mathrm{Claus}} = r' \cdot S_{\mathrm{Boltz}}$.

Vztahem (3.63) je tak tepelná entropie (Clausiova entropie $S_{\mathrm{Claus}} = \sigma + S_0$) celého pozorovaného termodynamického systému $\mathcal{A}$ v rovnovážném stavu (při teplotě Θ) definována zcela v souladu s požadavkem její extenzivity (aditivity). Pro náš myšlený pokus s diafragmou pak správně platí

$$
\sum_{j=1}^{m} S = S_j, \quad \text{kde} \quad S_{[\cdot]} \stackrel{\triangle}{=} S_{\mathrm{Claus},[\cdot]} \tag{3.107}
$$

Veličiny $\tilde{P}_j$ jsou termodynamické pravděpodobnosti soustav $\mathcal{A}_j$, buněk stavového prostoru (s indexem j, $\left[\frac{N_j}{N}\right]_j$) odpovídajících dělení látkového množství n systému v ekvilibriu na části n_i, $n = \sum_{i=1}^{m} n_i$ (s indexem i, $\left[\frac{n_i}{n}\right]_i$, $n_j = n_i$; to je ale obecně nerovnoměrné, definované pozorovatelem systému).

Nejjemnější možné námi definované rovnoměrné rozdělení pravděpodobnosti je dáno na daném stavovém prostoru jednočásticových buněk systému $\mathcal{A}$ v ekvilibriu (každá taková buňka je nyní obsazena jednou částicí, a to se stejnou pravděpodobností) je totožné s jeho 'vlastním', *mikrokanonickým* [41] rozdělením [index w, vztah (3.81)]. Potom platí $r = r' = 1$, a tedy

$$\left[\frac{N_i}{N}\right]_i = \left[\frac{1}{N}\right]_j \quad i, j = 1, \ ..., \ N, \quad S_{\text{Claus}} = S_{\text{Boltz}} = S_{\text{Gibbs}} \tag{3.108}$$

Hodnota S_{Claus} je tedy maximum 'fyzikální' entropie S_{Boltz}. Ta má ale 'informační' význam neurčitosti rozdělení pravděpodobnosti (s indexem j) definovaného časovým vývojem systému v daném stavovém prostoru (izolované soustavě, např. objemu V).

Entropie S_{Claus} je také maximem 'informační' entropie S_{Gibbs}, definované ale na stavovém prostoru rovnovážného systému jeho pozorovatelem (rozdělení s indexem i); je realizována ve fyzikální izolované soustavě 'systém v rovnovážném stavu a pozorovatel'.

Lze tedy entropii S_{Claus}, původně definovanou 'čistě fyzikálně', považovat i za veličinu (entropii) informační. Jedná se o speciální, fyzikálně realizovaný, tzv. *vázný* [8] případ obecné definice (kombinatoricky, pravděpodobnostně zavedené) informační, Shannonovské entropie, nyní vyjádřené ve fyzikálních jednotkách. Na tomto faktu nic nemění činitelé r, $r' \geq 1$.

3.3 Termodynamický a informační pojem entropie

Boltzmannem definovaná *entropie* (makrostavu) termodynamického *systému*, též nazývaná

- míra *neuspořádanosti* systému,
- míra (vzájemné) *nerozlišitelnosti* (částí 'uvnitř') systému,
- míra *degradace* (energie) systému (*Thomson, lord Kelvin*)[16]

je rostoucí a aditivní funkcí f termodynamické pravděpodobnosti $\tilde{P}$:

$$f(\tilde{P}) = \ln \frac{N!}{\prod_{i=1}^{m} N_i!} = -N \cdot \sum_{i=1}^{m} \frac{N_i}{N} \ln \frac{N_i}{N} = -N \cdot B$$

Maximální <u>entropie, neuspořádanost, nerozlišitelnost, degradace</u> [(rozložení tepelné) energie v] systému přísluší rovnovážnému makrostavu, v němž je pravděpodobnost

[16]Viz Dodatky 8.1.

výskytu částice ve všech buňkách stavového prostoru konstantní, resp. pravděpodobnost výběru, rozlišení buňky z hlediska v ní obsažené energie (částic, hmoty) je konstantní. Je zřejmé, že

$$B = -H(\Xi)$$

Veličina $-B$ je tedy entropiií rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny Ξ obsazení buněk stavového (např. fázového) prostoru.
Boltzmannova entropie makrostavu systému o N částicích a m rozlišovaných jejich (kvantových) stavech (buňky, v nichž se částice mohou nacházet) je pak

$$S_{\text{Boltz}} = -kNB, \quad k = \frac{R}{N_A}$$

Molární plynová konstanta R představuje tepelnou energii potřebnou ke zvýšení teploty jednotkového látkového množství 1 kmol o 1 K, resp. je to tepelná energie obsažená v 1 kmol látky na 1 K. Boltzmannova konstanta k je pak touto energií připadající na 1 částici.

Průměrná tepelná energie připadající na jednu částici systému a 1 K v makrostavu s hodnotou B Boltzmannovy funkce je pak $-kB \cdot (1\ \text{K})$.
Je-li systém v rovnovážném (makro)stavu při teplotě Θ a $m = N$, pak

$$-kB = k \ln N, \quad S_{\text{Boltz}} = kN \ln N$$

a pro celkové teplo Q obsažené v systému v ekvilibriu při teplotě Θ platí

$$\frac{Q}{\Theta} = kN \cdot \ln N \quad \text{a tedy} \quad Q = k\Theta \cdot N \ln N$$

Tedy

$$S_{\text{Claus}} = kN \ln N \tag{3.109}$$

, Teplo Q je teplo obsažené v systému N částic, ať už jsou tyto částice rozmístěny v uvažovaném prostoru jakkoliv (nerovnoměrně). Teplota Θ je teplotou (náhradního) rovnovážného stavu. Potom je tedy hodnota $-B_{[\text{Boltz/Gibbs}]}$ vždy hodnotou jisté Clausiovy termodynamické entropie na jednu částici $-B_{\text{Claus}}$ náhradního ekvivalentního rovnovážného[17] [57] systému N částic (se stejným teplem Q) při teplotě $T' = u \cdot \Theta$ (entropie koncového stavu ekvivalentní náhradní vratné cesty),

$$-B_{\text{Claus}} = -B_{[\text{Boltz/Gibbs}]} = \frac{\Delta Q}{kNT'}, \quad T' = u \cdot \Theta, \quad u \geq 1 \tag{3.110}$$

Výrazem $\dfrac{Q}{kNT'}$ lze tedy vyjádřit průměrné informační množství ve znaku zprávy o délce N znaků generované zdrojem zpráv o $m \leq N$ znacích abecedy a s informační entropií $\ln m$ ($\leq \ln N$).

[17] Viz Dodatky 8.3.

Tab. 3.1: Analogie termodynamické a informační entropie

	Termodynamická a informační entropie	
	Termodynamika	Teorie informace
	termodynamický systém $\mathcal{A}$	diskrétní zdroj zpráv Ξ
m	počet rozlišovaných stavů jedné částice (počet *kvantových* stavů částice), počet buňek stavového prostoru	mohutnost abecedy diskrétního zdroje zpráv
N	celkový počet částic systému	délka zprávy
$\tilde{P}$	termodynamická pravděpodobnost stavu, počet mikrostavů daného makrostavu	počet realizací zprávy zdrojem Ξ, definuje pravděpdobnost zprávy $\left(\dfrac{\tilde{P}}{\textit{počet všech realizací všech zpráv zdroje}}\right)$
m^N	celkový počet mikrostavů systému	počet všech zpráv délky N
$\ln \tilde{P}$	Boltzmannova entropie S_{Boltz} stavu systému $\mathcal{A}$ s termodynamickou pravděpodobností $\tilde{P}$, $S_{\mathrm{Boltz}} = k \ln \tilde{P} = -kNB$, $B = \sum_{i=1}^{m} \frac{N_i}{N} \ln \frac{N_i}{N} < 0$, $B = -H$ je Boltzmannova funkce	Shannonova informace $\mathcal{I}$ ve zprávě délky N generovaná zdrojem Ξ s informační entropií $H = \ln \tilde{P} = -\sum_{i=1}^{m} \frac{N_i}{N} \ln \frac{N_i}{N} > 0$, $I = N \cdot H$, $H = -B$ je Shannonova entropie
$\frac{N_i}{N} \overset{\mathrm{Def}}{=} p_i$	pravděpodobnost realizace i-tého stavu částice systému $\mathcal{A}$	pravděpodobnost výskytu i-tého znaku abecedy zdroje Ξ ve zprávě
$\ln m$	maximum funkce $-B$, $p_i = \frac{1}{m}$ (varieta množiny stavů částice)	maximum H, Hartleyova (míra) informace na jeden znak zprávy, $p_i = \frac{1}{m}$,
	$kN \ln m$ je maximum entropie S_{Boltz}, S_{Claus} při m rozlišovaných stavech částice, tj. při m buňkách stavového prostoru systému $\mathcal{A}$	$N \ln m$ je maximální průměrné množství informace, Hartleyova (míra) informace ve zprávě o N znacích s entropií zdroje $H = \ln m$
$m = N$,	$S_{\mathrm{Boltz}} = kN \ln N = S_{\mathrm{Claus}} = \frac{Q}{\Theta}$, $p_i = \frac{1}{N}$, ekvilibrium, $m = \gamma = N$, $-B^* = \frac{Q}{k\Theta N}$	$I = N \ln N$, $H_{\max} = \ln N$, $p_i = \frac{1}{N}$, maximum Shannonovy informace, $H_{\max}$

Clausiova entropie je jen zvláštním případem Boltzmannovy entropie, která je ale jen fyzikální realizací speciálního případu entropie Shannonovské (informační) pro *uniformní*, rovnoměrné rozdělení pravděpodobnosti.
Hovoříme o *vázané* [8] informační entropii.

Teplem Q o teplotě $T' = u \cdot \Theta$ lze tedy charekterizovat (modelovat) zprávu o délce N znaků generovanou zdrojem zpráv o N znacích abecedy a s informační entropií $\ln N$.
Tuto charakteristiku (model) zprávy budeme používat při studiu makroskopických, středně-hodnotových, vlastností termodynamicky chápaného a popsaného přenosu informace.

Náš dosavadní rozbor ukazuje, že máme ***jen jeden pojem entropie (informace)****. Odvozujeme jej kombinatoricky a interpretujeme jej informačně (matematicky) nebo termodynamicky (fyzikálně).*

Vztah mezi těmito dvěma pojetími pojmu entropie ukazuje Tab. 3.1.

4. Přenosový kanál teorie informace

4.1 Definice přenosového kanálu

Informační, přenosový, kanál $\mathcal{K}$ definujeme jako uspořádanou trojici

$$\mathcal{K} \overset{\text{Def}}{=} [X,\ \beta,\ Y] \tag{4.1}$$

X je *vstupní* náhodná veličina, *zdroj vstupních* zpráv $a \in A^+ \triangleq \mathcal{X}$, *vysílač*,

$$X \overset{\text{Def}}{=} [A,\ p_X(\cdot)] \tag{4.2}$$

Y je *výstupní* náhodná veličina, *zdroj výstupních* zpráv $b \in B^+ \triangleq \mathcal{Y}$, *přijímač*,

$$Y \overset{\text{Def}}{=} [B,\ p_Y(\cdot)] \tag{4.3}$$

Výstupní zprávy $b \in \mathcal{Y}$, *stochasticky*, pravděpodobnostně závislé na vstupních zprávách $a \in \mathcal{X}$, vyhodnocuje *příjemce, pozorovatel* zpráv. Veličina β ve vztahu (4.1) má tento význam:
β je *maximální průměrná* pravděpodobnost chyby při přenosu prvku $x \in A$ vstupní zprávy $a \in \mathcal{X}$, tj. maximální pravděpodobnost jeho chybného vyhodnocení jako (k němu nepatřícího) $y \in B$ ve výstupní zprávě $b \in \mathcal{Y}$.
Symboly ve vztahu (4.2) a (4.3), v *diskrétním* případě přenosového kanálu, mají tento význam:
A označuje konečnou (nejvýše spočetnou) *abecedu* prvků x zdroje vstupních zpráv,
B označuje konečnou (nejvýše spočetnou) abecedu prvků y zdroje výstupních zpráv,
$p_X(\cdot)$ je *rozdělení* pravděpodobnosti výskytu prvku $x \in A$ ve vstupní zprávě,
$p_Y(\cdot)$ je rozdělení pravděpodobnosti výskytu prvku $y \in B$ ve výstupní zprávě,

$$\sum_{x \in A} p_X(x) = 1, \quad \sum_{y \in B} p_Y(y) = 1 \tag{4.4}$$

Uspořádanou trojici $(X,\ \mathcal{K},\ Y)$, resp. $(\mathcal{X},\ \mathcal{K},\ \mathcal{Y})$ nazýváme *přenosový (Shannnonovský)* řetězec.

Jako $H(X)$, resp. $H(Y)$ označujeme *vstupní*, resp. *výstupní*, *informační (Shannonovské) entropie* kanálu $\mathcal{K}$,

$$\begin{aligned} H(X) \ &\overset{\text{Def}}{=} \ -\sum_{x \in A} p_X(x) \ln p_X(x) \\ H(Y) \ &\overset{\text{Def}}{=} \ -\sum_{y} p_Y(y) \ln p_Y(y) \end{aligned} \tag{4.5}$$

Definují *průměrné množství informace ve znaku* (zprávě) $x \in A$, resp. zprávě $y \in B$.

Jako $H(X|Y)$ označujeme *ztrátovou*, a jako $H(Y|X)$ označujeme *rušivou (šumovou)* entropii kanálu. Tyto entropie jsou definovány vztahy

$$\begin{aligned} H(X|Y) &\overset{\text{Def}}{=} -\sum_A \sum_B p_{X,Y}(x,y) \ln p_{X|Y}(x|y) \\ H(Y|X) &\overset{\text{Def}}{=} -\sum_A \sum_B p_{X,Y}(x,y) \ln p_{Y|X}(y|x) \end{aligned} \tag{4.6}$$

kde

$$\begin{aligned} p_Y(y) &= \sum_A p_X(x)\, p_{Y|X}(y|x),\ \sum_B p_Y(y) = 1 \\ p_X(x) &= \sum_B p_Y(y)\, p_{X|Y}(x|y),\ \sum_A p_X(x) = 1 \end{aligned} \tag{4.7}$$

a

$$p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)\, p_{Y|X}(y|x) = p_Y(y) p_{X|Y}(x|y) = p_{Y,X}(y,x) \tag{4.8}$$

Tato definice je oprávněná, neboť:

$$\begin{aligned} H(Y|X=x) &= -\sum_B p_{Y|X}(y|x) \ln p_{Y|x}(y|x) \\ H(Y|X) &= \sum_A p_X(x) \sum_B p_{Y|X}(y|x) \ln p_{Y|X}(y|x) = -\sum_A \sum_B p_{X,Y}(x,y) \ln p_{Y|X}(y|x), \end{aligned}$$

Zřejmě je třeba požadovat

$$p_{Y|X}(\cdot|\cdot) + p_{X|Y} \overset{\triangle}{=} p(\cdot|\cdot) \le \beta \tag{4.9}$$

Ve spojitém případě definujeme *diferenciální, relativní* entropie

$$\begin{aligned} H(X) &\overset{\text{Def}}{=} -\int_A p_X(x) \ln p_X(x)\ \mathrm{d}x \\ H(Y) &\overset{\text{Def}}{=} -\int_B p_Y(y) \ln p_Y(y)\ \mathrm{d}y \\ H(X|Y) &\overset{\text{Def}}{=} -\int_A \int_B p_{X,Y}(x,y) \ln p_{X|Y}(x|y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \\ H(Y|X) &\overset{\text{Def}}{=} -\int_A \int_B p_{X,Y}(x,y) \ln p_{Y|X}(y|x)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \end{aligned} \tag{4.10}$$

kde $p.(\cdot)$, $p.(\cdot|\cdot)$ jsou hustoty pravděpodobnosti a A, B jsou sjednocení nedegenerovaných intervalů z R^+.
Simultánní entropie $H(X,Y)$ je pro diskrétní a spojitý případ definována rovnostmi

$$H(X,Y) \overset{\text{Def}}{=} -\sum_A \sum_B p_{X,Y}(x,y) \ln[p_{X,Y}(x,y)] \tag{4.11}$$

nebo

$$H(X,Y) \overset{\text{Def}}{=} -\int_A \int_B p_{X,Y}(x,y) \ln[p_{X,Y}(x,y)]\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$

Potom, třeba pro diskrétní případ, platí

$$\begin{aligned}
H(X,Y) &= -\sum_A \sum_B p_{Y|X}(y|x) p_X(x) \ln[p_{Y|X}(y|x) p_X(x)] \qquad (4.12)\\
&= -\sum_A \sum_B p_{Y|X}(y|x) p_X(x) \ln[p_X(x)] - \sum_A \sum_B p_X(x) p_{Y|X}(y|x) \ln[p_{Y|X}(y|x)]\\
&= -\sum_A p_X(x) \ln[p_X(x)] \sum_B p_{Y|X}(y|x) - \sum_A \sum_B p_X(x) p_{Y|X}(y|x) \ln[p_{Y|X}(y|x)]\\
&= H(X)\cdot 1 + H(Y|X)
\end{aligned}$$

Tedy

$$H(X,Y) \quad = \quad H(X) + H(Y|X) \ \text{ a obdobně } \ H(X,Y) = H(Y) + H(X|Y)$$

Vzájemná, přenesená užitečná, informace, *transinformace* [44] označovaná $T(X;Y)$ nebo $T(Y;X)$, je definována vztahy

$$T(X;Y) \stackrel{\text{Def}}{=} \sum_A \sum_B p_{X,Y}(x,y) \ln \frac{p_{Y|X}(y|x)}{p_X(x)} \qquad (4.13)$$

resp.

$$T(X;Y) \stackrel{\text{Def}}{=} \int_A \int_B p_{X,Y}(x,y) \ln \frac{p_{X|Y}(x|y)}{p_X(x)} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

resp.

$$T(Y;X) \stackrel{\text{Def}}{=} \sum_A \sum_B p_{X,Y}(x,y) \ln \frac{p_{X|Y}(x|y)}{p_Y(y)}$$

resp.

$$T(Y;X) \stackrel{\text{Def}}{=} \int_A \int_B p_{X,Y}(x,y) \ln \frac{p_{Y|X}(y|x)}{p_Y(y)} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Ze (4.7) a (4.8) ihned plyne, že

$$\begin{aligned}
T(X;Y) &= H(X) - H(X|Y)\\
&= H(X) + H(Y) - H(X,Y)\\
T(Y;X) &= H(Y) - H(Y|X)\\
&= H(X) + H(Y) - H(X,Y)
\end{aligned}$$

Z definic (4.5), (4.6) resp. (4.10) pak plyne, že platí rovnost

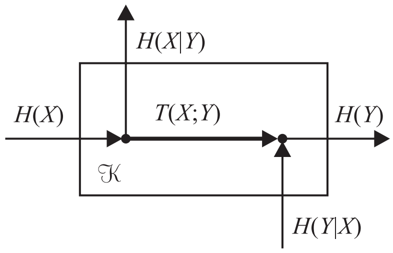
$$T(X;Y) = T(Y;X) \qquad (4.14)$$

Ze vztahů (4.13) a (4.14) je pak zřejmé, že platí rovnice *zachování* entropie (informace) v přenosovém kanále $\mathcal{K}$ (viz také Obr. 4.1.),

$$H(X) - H(X|Y) \quad = \quad H(Y) - H(Y|X) \qquad (4.15)$$

a tedy také

$$H(X) + H(Y|X) \quad = \quad H(Y) + H(X|Y)$$



Obr. 4.1: Vztah mezi entropiemi přenosového kanálu

Rovnice (4.15) platí jak pro veličiny $H(\cdot)$, $H(\cdot|\cdot)$, tak pro jejich změny $\Delta H(\cdot)$, $\Delta H(\cdot|\cdot)$. Platí tedy i pro konkrétní množství informace i obsažené ve vlastním jevu (zprávě, alternativě) s pravděpodobností výskytu $p.(\cdot)$,

$$i. = -\ln p.(\cdot) \tag{4.16}$$

Platí tedy také

$$i_X + i_{Y|X} = i_Y + i_{X|Y} \tag{4.17}$$

V kanále $\mathcal{K}$ *beze ztrát* platí

$$H(X|Y) = 0,\ T(X;Y) = H(X) \tag{4.18}$$

v kanále $\mathcal{K}$ *bez rušení* platí

$$H(Y|X) = 0,\ T(X;Y) = H(Y) \tag{4.19}$$

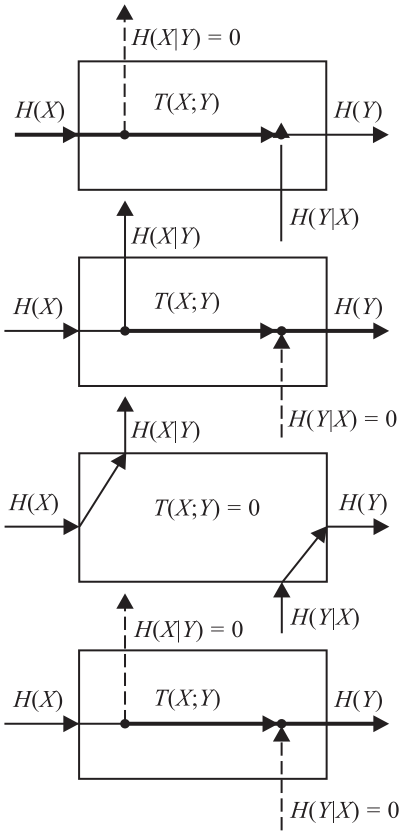
je-li kanál $\mathcal{K}$ *přerušený* (absolutně zašuměný), platí

$$H(X) = H(X|Y),\ H(Y) = H(Y|X),\ T(X;Y) = 0 \tag{4.20}$$

a je-li kanál $\mathcal{K}$ *bez rušení a ztrát*, platí

$$T(X;Y) = H(X) = H(Y),\ H(X|Y) = H(Y|X) = 0 \tag{4.21}$$

viz Obr. 4.2 na následující straně.



Obr. 4.2: Přenosový kanál: beze ztrát, bez rušení, přerušený, bez rušení a ztrát

V důsledku existence ztrát a rušení v *reálném* kanále $\mathcal{K}$ nebudou ztrátová entropie $H(X|Y)$ (též *neurčitost příjemce* zpráv o vyslané zprávě $x \in A$) a rušivá entropie $H(Y|X)$, tedy i *celková* neurčitost příjemce o rozdělení zdroje zpráv, úplně odstraněny nikdy.

Informační entropie a opakované pozorování. Veličinu $H(X)$ lze rovněž interpretovat jako *počáteční* neurčitost, entropii, příjemce zprávy, tj. pozorovatele výstupu Y, před přijetím zprávy y o zprávě x. Veličinu $H(Y)$ pak lze interpretovat jako *výslednou* změnu této neurčitosti, entropie příjemce zprávy, tj. pozorovatele výstupu Y, po přijetí y o zprávě x. $H(Y) = H(X) - H'(X|Y)$, kde $H'(X|Y) = H(X|Y) - H(Y|X)$ je *celková* ztrátová entropie, kde $H(Y|X) > 0$.

Protože při $H(Y|X) = 0$ pro transinformaci platí $T(X;Y) = H(X) - H(X|Y)$ a tedy dále, $T(X;Y) = H(Y)$, lze veličinu $T(X;Y)$ považovat za *průměrné snížení původní* neurčitosti příjemce z hodnoty $H(X) \stackrel{\triangle}{=} H^{(1)}(X)$ na $H(X|Y)$. Veličinu $H(X|Y)$ je pak vhodné nazývat *zbytková* neurčitost (entropie) příjemce zpráv při příjmu zprávy y o zprávě x. Jedná se vlastně o zbytek prvního ($l = 1$) snížení neurčitosti příjemce zpráv (o rozdělení pravděpodobnosti zdroje zpráv X) o hodnotu $T^{(1)}(X;Y)$, $T^{(1)}(X;Y) = H(X) - H(X|Y) \stackrel{\triangle}{=} H^{(0)}(X|Y) - H^{(1)}(X|Y)$. V dalších krocích komunikace, za účelem co nejpřesnějšího zjištění vysílané zprávy, resp. rozdělení pravděpodobnosti zdroje zpráv X, je tato neurčitost příjmem zpráv y o zprávách x snižována o transinformaci $T^{(l)}(X;Y) = H^{(l-1)}(X|Y) - H^{(l)}(X|Y)$, $l \geq 2$. Výchozí neurčitosti příjemce, $H^{(l)}(X)$, $l \geq 1$, jsou tedy zbytkové entropie $H^{(i)}(X|Y),\ i = l - l \geq 0$. Je zřejmé, že rovnost $H^{(0)}(X|Y) = H^{(1)}(X) = H(X)$ definuje počáteční podmínku přenosu. Přirozeně klademe $\max H^{(0)}(X|Y) = \max H(X) \stackrel{\triangle}{=} \mathcal{H}(\mathcal{X})$. Veličinu $\mathcal{H}(\mathcal{X})$ interpretujeme jako tepelnou entropii (fyzikální, Boltzmanovu-Clausiovu) v informačních jednotkách chemického (fyzikálního) systému v rovnovážném stavu, termodynamickém ekvilibriu, představujícího zdroj zpráv X. Na počátku komunikace, přesněji před počátkem příjmu zprávy y, je podle Jaynesova [37] *principu maximální* entropie vhodné klást entropii příjemce zprávy $H^0(X|Y) \stackrel{\text{Def}}{=} \mathcal{H}(\mathcal{X})$; je však možná i jiná volba.

Je-li (změna) $H(Y|X) < 0$, což bude náš případ *subtraktivního* kanálu, je celková průměrná změna (snížení) neurčitosti $H(X)$ (tedy zisk informačního množství) příjemce zprávy x po příjmu zprávy y, dáno výstupní entropií kanálu, $H(Y) = T(X;Y) + H(Y|X) = H(X) - H(X|Y) - |H(Y|X)|$. V našem případě se tedy jedná o šumy (rušení) v kanále, které *subtraktivním* zkreslením vstupní, přenášené zprávy x způsobují další ztrátu přenášené informace, a tedy malé snížení původní neurčitosti $H(X)$ příjemce zpráv. Může tedy nastat situace, kdy $H(Y) = [T(X;Y) + H(Y|X)] \to 0$, a tedy $[H(X) - H(Y)] \to H(X)$. Příjemce zpráv má pak téměř stejnou nejistotu o vstupní zprávě po skončení jejího přenosu jako před jeho započetím. Dochází tedy jen k jejímu malému (nebo žádnému, platilo by znaménko =) zmenšení z původní hodnoty $H(X)$. Cílem přenosu zprávy, v ní obsaženého (průměrného) informačního množství, je aby platilo $H(X) - H(Y) = 0$, přesněji aby platilo $|H(X) - H(Y)| \leq \delta,\ \ \delta > 0,\ \ \delta \to 0$. Veličina δ je pak maximální hodnota *celkové zbytkové* neurčitosti příjemce, $\delta = H'(X|Y) = H(X|Y) + |H(Y|X)|,\ \ H(Y|X) < 0$. V důsledku existence ztrát a rušení v reálném kanálu není (celková) neurčitost $H'(X|Y)$ příjemce zpráv o vyslané zprávě x úplně odstraněna nikdy.

4.2 Informační kapacita přenosového kanálu

Na přenosovém kanálu $\mathcal{K}$ definujeme *informační kapacitu* jako maximum (supremum) množiny hodnot transinformací $T(X;Y)$ přes všechna možná rozdělení $p_X(\cdot)$, $p_Y(\cdot)$ náhodných veličin X a Y, tedy

$$C_{\mathcal{K}} \stackrel{\text{Def}}{=} \sup_{\{p_X(\cdot),\ p_Y(\cdot)\}} T(X;Y). \tag{4.22}$$

Shannonův teorém o kapacitě kanálu [9, 16, 64, 69, 70][18] říká:
Zprávu x ze zdroje X lze informačním kanálem $\mathcal{K}$ přenášet s libovolně malou pravděpodobností chyby přenosu β (maximální průměrnou), $\beta > 0$, pokud pro entropii zdroje platí $H(X) < C_{\mathcal{K}}$.
Tehdy existuje přirozené číslo $m_0 \in \mathbf{N},\ m_0 = m_0(\beta)$, takové, že pokud pro počet znaků $m,\ m \in \mathbf{N}$ zprávy x ze zdroje zpráv X s abecedou o mohutnosti M_m, $X = (M_m)^+$ rostoucí s m, $m = m(\beta)$, platí, že pro

$$m \geq m_0(\beta) \ \ [\ m_0(\beta) \to \infty,\ \beta \to 0\ ] \tag{4.23}$$

je

$$p(\cdot|\cdot) \leq \beta \ \ [\ p_{Y|X}(\cdot|\cdot) \to 0,\ \beta \to 0\ ] \tag{4.24}$$

[18] Viz Dodatky 8.5.

Platí-li nerovnost $H(X) \geq C_{\mathcal{K}}$, nelze chybovost β přenosu, a tedy i chyby $p(\cdot|\cdot)$ libovolně stlačit k nule.

Máme-li možnost přivádět jistý termodynamický systém $\mathcal{L}$ postupně do libovolných, předem zvolených (rovnovážných) stavů $\boldsymbol{\theta}_{i_1}, \boldsymbol{\theta}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{\theta}_{i_m}$, které jsou realizacemi (vstupní) náhodné veličiny $\boldsymbol{\theta}$, můžeme předat pozorovateli, který naměří při m pozorováních hodnoty $\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, \ldots, \alpha_{k_m}$ (náhodné) veličiny $\boldsymbol{\alpha}$, přes kterou pozoruje veličinu $\boldsymbol{\theta}$, jistou informaci (obsaženou v posloupnosti vstupních stavů, tedy zprávě $\boldsymbol{\theta}_{i_1}, \boldsymbol{\theta}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{\theta}_{i_m}$). Zajímá nás, jaká je maximální možná (průměrná) hodnota informace, kterou lze takto předat při jednom pozorování, měření. Předpokládejme, že chceme pozorovateli sdělit jednu ze zpráv zdroje $\mathcal{Z}_m = \{1, 2, \ldots, M_m\}$, jehož mohutnost M_m roste s počtem pozorování m jako celá část čísla $\mathrm{e}^{\mathcal{R}m}$, kde $\mathcal{R} > 0$ je určitá konstanta zvaná *informační vydatnost* zdroje. Ze Shannonova *kódovacího teorému kanálu* [9] vyplývá, že zprávu ze zdroje $\mathcal{Z}_m$ lze předat pozorovateli s libovolně malou pravděpodobností chyby, $\beta > 0$, při dostatečně velkém rozsahu pozorování m, pokud $\mathcal{R} < C_{\mathcal{K}}$, kde

$$C_{\mathcal{K}} = \sup_{\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta},\ \mathcal{L}} T(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{\alpha}) \tag{4.25}$$

je informační kapacita systému $\mathcal{L}$. Dále z téhož teorému vyplývá, že pokud $\mathcal{R} > C_{\mathcal{K}}$, nelze zprávu ze zdroje $\mathcal{Z}_m$ při žádném rozsahu pozorování m předat s libovolně malou pravděpodobností chyby $p(\cdot|\cdot) \leq \beta$. *'Předat zprávu pozorovateli'* znamená zvolit zobrazení k_m (*kodér* zdroje zpráv),

$$k_m : \mathcal{Z}_m \rightarrow \{0, 1, 2, \ldots\}^m$$

seznámit s ním pozorovatele a v případě, že se jedná o zprávu $x \in \mathcal{Z}_m$ a $k_m(x) = (i_1, \ldots, i_m) \in \{0, 1, \ldots\}^m$, transformovat systém $\mathcal{L}$ postupně do (rovnovážných) stavů $\boldsymbol{\theta}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{\theta}_{i_m}$, přičemž v každém stavu $\boldsymbol{\theta}_{i_k}$ nechat pozorovatele, aby změřil náhodnou hodnotu α_{i_k} výstupní veličiny $\boldsymbol{\alpha}$. Shannonův teorém za těchto podmínek zaručuje, že pro libovolné $\beta > 0$ existuje m_{m_β} takové, že při všech $m > m_\beta$ lze zvolit kodér k_m tak aby pozorovatel měl k dispozici zobrazení d_m (dekodér svých pozorování), ,

$$d_m : \mathcal{S}(\boldsymbol{\alpha})^m \rightarrow \mathcal{Z}_m$$

s vlastností

$$\max_{z \in \mathcal{Z}_m} Pr[d_m(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_m}) \neq x] = p(\cdot|\cdot) < \beta$$

Toto je přesný význam slov *'pozorovateli lze předat zprávu s libovolně malou pravděpodobností chyby'*.
Pojem *'nelze předat'* pak znamená logickou negaci pojmu *'lze předat'*.

Kapacita $C_{\mathcal{K}}$ představuje maximální (průměrné) množství informace, které lze tímto ovlivňováním systému $\mathcal{L}$ (kódováním) předat pozorovateli veličiny $\boldsymbol{\alpha}$ při jednom pozorování.

4.3 Termodynamická interpretace přenosu informace

Za termodynamický systém $\mathcal{L}$ budeme dále považovat pracovní látku Carnotova stroje s ohřívákem $\mathcal{A}$ a chladníkem $\mathcal{B}$. Za libovolnou *vstupní* zprávu pak považujeme teplo ΔQ_W a za libovolnou *výstupní* zprávu mechanickou práci ΔA ze vztahu (2.2) nebo $\Delta A'$ ze vztahu (2.17).

Aktem jednoho měření, pozorování vstupního stavu $\boldsymbol{\theta}_i$ systému $\mathcal{L}$ [stavu vstupního systému $\mathcal{A}$ resp. dvojice $(\mathcal{AB})$] bude jeden průchod pracovní látky $\mathcal{L}$ Carnotovým cyklem $\mathcal{O}$ nebo $\mathcal{O}'$.

Samotnou látku $\mathcal{L}$ procházející tímto cyklem pak budeme považovat za přenosový kanál $\mathcal{K}$ z definice (4.1). Lze také hovořit o cyklech $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}'$ jako přenosových procesech v kanálu $\mathcal{K}$. Přesněji vzato, provádíme tedy měření na systému $(\mathcal{AB})$, který je (obecně) ve stavu nerovnovážném tak, že části $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ jsou v různých rovnovážných stavech při teplotách T_W a T_0 a stavy systému $\mathcal{A}$ jsou vstupními (rovnovážnými) stavy $\boldsymbol{\theta}_i$ systému $\mathcal{L}$, jehož prostřednictvím měření stavu systému $\mathcal{A}$ provádíme.

Budeme tedy předpokládat, že přeměnu tepelné energie ΔQ na mechanickou práci ΔA nebo $\Delta A'$ v tepelném cyklu (zde speciálně v Carnotově cyklu $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}'$) lze vyjádřit v termínech přenosového kanálu teorie informace. Tepelným entropiím, resp. jejich změnám (4.36) dále budeme přisuzovat význam (změn) informačních množství definovaných v přenosovém kanále $\mathcal{K}$ vztahy (4.5), (4.6), resp. (4.10). Výstupní zpráva ΔA, $\Delta A'$ bude mít informační množství $\Delta\mathcal{I}$ resp. $\Delta\mathcal{I}'$,

$$\Delta\mathcal{I} \stackrel{\mathrm{Def}}{=} \frac{\Delta A}{kT_W}, \quad \text{resp.} \quad \Delta\mathcal{I}' \stackrel{\mathrm{Def}}{=} \frac{\Delta A'}{kT_W} \tag{4.26}$$

viz také (4.36) dále. Podle Brillouina [8] totiž platí, že k *záznamu, přenosu, vyslání* nebo *zpracování* průměrného informačního množství $\Delta\mathcal{I}$ $[\Delta\mathcal{I} = H(X)]$ při teplotě Θ je zapotřebí (minimální) průměrná energie ΔW,

$$\Delta W = k \cdot \Theta \cdot \Delta\mathcal{I} \tag{4.27}$$

zde bude $\Delta W \stackrel{\triangle}{=} \Delta Q_W$. Podle Landauera [48] pak platí, že při *nevratném* záznamu, přenosu nebo zpracování jednoho bitu zprávy (informace) při teplotě Θ dochází k disipaci tepelné energie ΔW_{1x},

$$\Delta W_{1x} \geq k \cdot \Theta \cdot \ln 2 \tag{4.28}$$

Podle vztahů (4.27) a (4.28) je tedy k zápisu zprávy o n bitech zapotřebí (průměrné) energie

$$\Delta W_x \quad \geq \quad k \cdot \Theta \cdot n \ln 2 \tag{4.29}$$

na disipaci, a tedy

$$\Delta W \quad > \quad k \cdot \Theta \cdot nH \tag{4.30}$$

při entropii zdroje H a n znacích zprávy.

Nevratností pak rozumíme, že daný proces probíhá uvnitř širší izolované soustavy, jejíž celková tepelná entropie $S_{\mathcal{C}}$ disipací, tj. vznikem a rozptylem šumového (ale ne jenom šumového, také odpadního) tepla roste. Mezi $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ dochází totiž k přechodu tepla ve směru z $\mathcal{A}$ s T_W do $\mathcal{B}$ s T_0 přes látku $\mathcal{L}$. Protože $T_W > T_0$, tepelná entropie tepelné energie (degradace tepla) systému $(\mathcal{AB})$ roste. Roste tudíž i celková entropie $S_{\mathcal{C}}$. Systém $(\mathcal{AB})$ je v tomto pohledu soustavou, která je teplu z $\mathcal{A}$, ale i z $\mathcal{L}$ (šumovému) celkem k dispozizi. Tato soustava a celý tepelný stroj je v důsledku izolovanosti od okolí také soustavou *adiabatickou*. Pro *celkovou* tepelnou entropii $S_{\mathcal{C}}$ takové soustavy tedy platí

$$\frac{\mathrm{d}S_{\mathcal{C}}}{\mathrm{d}t} > 0 \tag{4.31}$$

t je čas. Vztahem (4.31) definujeme tzv. *termodynamickou šipku* času

$$\Delta t > 0 \tag{4.32}$$

Vývoj stavu *adiabatického* systému pak vyjadřuje ***Carathéodoryho*** formulace II. hlavní věty termodynamické[19] [13, 31, 38, 40]:

V libovolné blízkosti libovolného stavu uzavřeného adiabatického systému se nacházejí stavy, které nemůžeme z počátečního stavu dosáhnout adiabatickou cestou, nebo:
V blízkosti každého stavu izolované soustavy, dosažitelného vratnou změnou, existují stavy, kterých soustava nemůže nabýt změnou vratnou, ale jen změnou nevratnou (tzv. přirozenou), nebo stavy, do nichž vůbec nemůže dospět.

Fyzikálním rozměrem tepelné entropie S, používáme-li k jejímu vyjádření funkce $k \cdot \log_{10}$, je *termodynamická* jednotka boltzmann, pro $k \cdot \ln$ je to clausius.
Změna termodynamické entropie S termodynamického systému $\mathcal{L}$ na jednu částici nebo jednotkové látkové množtsví! je dána výrazem

$$\frac{\Delta q}{\Theta M}, \quad \Delta q \triangleq \Delta q(\Theta), \quad \Theta > 0, \tag{4.33}$$

kde $\Delta q(\Theta)$ je teplo, které systém vratně vymění se svým okolím při (např. konstantní) teplotě Θ, M označuje počet částic nebo látkových množství v systému.
Entropii S lze měřit i v *informačních* jednotkách hartley, nat, bit. Pak používáme jen funkcí $\log_{10}$, $\ln$, $\log_2$. Její změnu vyjadřujeme výrazem

$$\frac{\Delta q(\Theta)}{k\Theta} \text{ nebo } \frac{\Delta q(\Theta)}{k\Theta M} \tag{4.34}$$

Dále budeme používat symboly $\Delta Q_{[\cdot]}$, $\Delta S_{[\cdot]}$,

$$\Delta Q_{[\cdot]} \triangleq \frac{\Delta q_{[\cdot]}}{M}, \quad \Delta S_{[\cdot]} \triangleq \frac{\Delta Q_{[\cdot]}}{k\,\Theta}, \quad \Theta \triangleq T_W,\ T_0,\ T_W \geq T_0 > 0 \tag{4.35}$$

[19] Viz Dodatky 8.6.

Následující poměry [změny clausiovsky definovaných entropií a poměr 'Brillouinův' ze vztahu (4.26)] pak budeme nazývat *změnami* informačních entropií v cyklu $\mathcal{O}$ nebo $\mathcal{O}'$:

$$\frac{\Delta A}{kT_W}, \quad \text{resp.} \quad \begin{array}{ll} \dfrac{\Delta Q_W}{kT_W} & \textit{vstupní} \\ \dfrac{\Delta A'}{kT_W} & \textit{výstupní} \;\; (\triangleq \Delta\mathcal{I}, \;\; \text{resp.} \;\; \triangleq \Delta\mathcal{I}') \\ \dfrac{\Delta Q_0}{kT_W} & \textit{ztrátové}, \\ \dfrac{\Delta Q_{0x}}{kT_W} & \textit{šumové, rušivé}. \end{array} \tag{4.36}$$

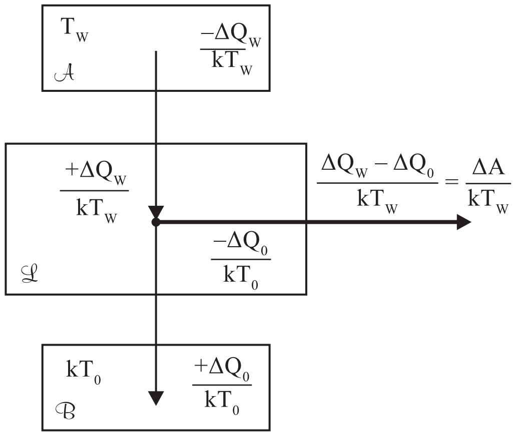
Tyto změny pak lze považovat za změny hodnoty *průměrných* informačních množství obsažených ve zprávách na vstupech a výstupech '*carnotovsky*' (termodynamicky) popsaného přenosového kanálu $\mathcal{K}$, o velikostech $\Delta H(\cdot)$, $\Delta H(\cdot|\cdot)$ [ale také $\mathcal{I}(\cdot)$, $\mathcal{I}(\cdot|\cdot)$] definovaných v odd. 4.2.
Budeme, bez újmy na obecnosti, uvažovat zněny (o velikostech průměrných informačních množství) $H(\cdot) \triangleq \Delta H(\cdot)$, $H(\cdot|\cdot) \triangleq \Delta H(\cdot|\cdot)$.

Informační množství a informační entropie realizované fyzikálně nazýváme *vázané informace* a *vázané entropie* [8].

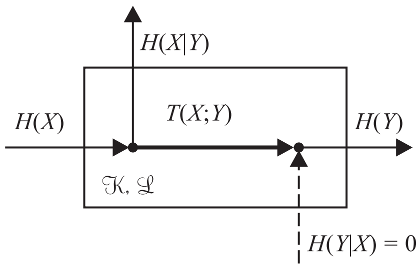
5. Analogie přenosu zprávy a tepelného cyklu

5.1 Vratný Carnotův cyklus a přenosový kanál bez šumu

Vratný Carnotův cyklus $\mathcal{O}$ [pro produkci šumového tepla platí $\Delta Q_{0x} = 0$, viz vztahy (2.12) a (2.13)], přesněji pracovní látku $\mathcal{L}$, která tímto cyklem prochází považujeme za *termodynamický, středně-hodnotový* model informačního kanálu $\mathcal{K}$ *bez šumu*, viz Obr. 5.1 a Obr. 5.2.



Obr. 5.1: Schema vratného Carnotova cyklu



Obr. 5.2: Přenosový kanál modelující Carnotův vratný cyklus

Podle (4.19) pro průměrnou šumovou informaci (entropii) $H(Y|X)$ definovanou vztahy (4.6) a (4.10) platí $H(Y|X) = 0$.
Na kanále $\mathcal{K}$ (na jeho vstupech a výstupech) definujeme změny hodnot průměrných informačních množství o velikostech $H(X)$, $H(Y)$, $H(Y|X)$ definovaných vztahy (4.5), (4.6) nebo (4.10), v souladu s označováním (4.36) takto:

$$\begin{aligned}
H(X) &\stackrel{\text{Def}}{=} \frac{\Delta Q_W}{kT_W} \quad \left[= \frac{\Delta Q_0}{kT_0}, \quad \text{podle (2.7)}\right] && (5.1)\\
H(Y) &\stackrel{\text{Def}}{=} \frac{\Delta A}{kT_W} \\
&= \frac{\Delta Q_W - \Delta Q_0}{kT_W} = \frac{\Delta Q_W}{kT_W} \cdot \eta_{\max} = H(X) \cdot \eta_{\max} \triangleq \Delta \mathcal{I} \\
H(Y|X) &\stackrel{\text{Def}}{=} 0
\end{aligned}$$

Předpokládáme tedy, že látka $\mathcal{L}$ procházející vratným Carnotovým cyklem $\mathcal{O}$ pracuje jako informační kanál $\mathcal{K}$, $\mathcal{K} \cong \mathcal{L}$, a tedy že pro hodnoty veličin o velikostech $H(X)$, $H(Y)$, $H(Y|X)$, $H(X|Y)$ ze vztahů (5.1) platí rovnice (4.15). Přesněji řečeno je cyklus $\mathcal{O}$ termodynamickým, středně-hodnotovým modelem přenosového procesu probíhajícího v kanále $\mathcal{K}$, jehož termodynamickým modelem je látka $\mathcal{L}$.

Předpokládáme tedy, že vratný Carnotův cyklus $\mathcal{O}$ přenáší libovolnou vstupní zprávu x, kterou kódujeme jako teplo ΔQ_W, $x \cong \Delta Q_W$, o průměrném informačním množství $H(X)$ definovaném rovnicí (5.1), na mechanický výstup cyklu (stroje). Výstupní zpráva y je kódována v cyklu $\mathcal{O}$ vykonanou celkovou mechanickou prací ΔA, $y \cong \Delta A$ (zdvižení závaží nebo stlačení pružiny na mechanickém výstupu stroje, cyklu), tedy *změnou* ΔE_{P_W} (mechanické) potenciální energie E_{P_W}, $\Delta E_{\mathrm{P}_W} = \Delta A$. *Informační* mírou změny *uspořádání, strukturovanosti*, mechanického výstupu cyklu, tedy změny ΔE_{P_W} parametru E_{P_W}, je výstupní entropie $H(Y) = \Delta\mathcal{I}$. Zřejmě tedy $\Delta\mathcal{I} = \dfrac{\Delta E_{\mathrm{P}_W}}{kT_W}$.

Podle definice (5.1) a předpokladu (4.15) tedy platí

$$\frac{\Delta Q_W}{kT_W} \cdot \eta_{\max} - 0 \quad = \quad \frac{\Delta Q_W}{kT_W} - H(X|Y) \tag{5.2}$$

a tudíž

$$H(X|Y) \quad = \quad \frac{\Delta Q_W}{kT_W} \cdot (1 - \eta_{\max})$$

nebo

$$H(X|Y) \quad = \quad \frac{\Delta Q_W}{kT_W} \cdot \beta, \quad \beta = \frac{T_0}{T_W}, \quad T_W \geq T_0 > 0$$

a podle (2.7) pak platí

$$H(X|Y) \quad = \quad \frac{\Delta Q_0}{kT_W}$$

Rovnost na konci odvození (5.2), definující průměrnou ztrátovou informaci (entropii) $H(X|Y)$ v kanále $\mathcal{K} \cong \mathcal{L}$, je [při definicích (5.1)] ve shodě s pojmem a fungováním ztrátového tepla ΔQ_0, odebíraného, ale pro celkový informační výstup $\Delta\mathcal{I}$ vzniklý mechanickou prací ΔA při teplotě T_W nevyužitého. To vyjadřuje jmenovatel posledního zlomku ve vztahu (5.2).

Pro transinformaci definovanou vztahy (4.13) a podle definičních vztahů (5.1) pak platí

$$T(X;Y) \quad = \quad H(X) \cdot (1 - \beta) = H(X) \cdot \eta_{\max} \tag{5.3}$$

tedy

$$T(X;Y) \quad = \quad \frac{\Delta Q_W}{kT_W} \cdot \eta_{\max} = \frac{\Delta A}{kT_W}$$

nebo, psáno jen informačně

$$T(X;Y) \quad = \quad \Delta\mathcal{I}$$

Rovnost vztahů (4.14) a (4.15) je z odvození (5.1), (5.2) a (5.3) zřejmá; takto odvozená hodnota transinformace vyhovuje požadavku symetričnosti.
Z výsledku (5.2) a vztahů (5.3) plyne, jako důsledek Thomsonovy-Planckovy formulace II. hlavní věty termodynamické, nerovnost

$$\Delta\mathcal{I} = T(X;Y) < H(X) \tag{5.4}$$

Rovnost ve vztahu (5.4) platí pro všechny vratné (Carnotovy) cykly (s pracovními teplotami $T_W \geq T_0$) a lze ji považovat za *informační formulaci* první části Carnotovy věty.
Hodnota $T(X;Y)$ je pro dané $T_W,\ T_0$ a ΔQ_W *jedinou*, a tedy je i kapacitou $C_{\mathcal{K}}$,[20]

$$C_{\mathcal{K}} \overset{\text{Def}}{=} T(X;Y) \tag{5.5}$$

a tedy

$$C_{\mathcal{K}} = H(X)\cdot\eta_{\max} = \frac{\Delta Q_W}{kT_W}\cdot\eta_{\max} = \frac{\Delta A}{kT_W} = H(Y)$$

Nejlepšího přenosu dosahujeme při $\eta_{\max} = 1$, tedy pro $\Delta Q_0 = 0$ nebo $\Delta Q_W = \infty$, kdy $H(X) = H(Y)$. Je zřejmé, že tato rovnost je reálně nedosažitelná, vždy platí, že $H(X|Y) > 0$, tedy $\Delta Q_0 > 0$. Případ *nevlastní* hodnoty $\Delta Q_W = \infty$ je také zřejmý.

Pro změnu $\Delta S_{\mathcal{L}}$ celkové tepelné entropie $S_{\mathcal{C}}$ celého vratného Carnotova stroje v látce $\mathcal{L}$ během jednoho průchodu cyklem $\mathcal{O}$ platí podle (2.9)

$$\Delta S_{\mathcal{L}} = \oint_{\mathcal{O}} \frac{\Delta Q}{T} = \frac{\Delta Q_W}{kT_W} - \frac{\Delta Q_0}{kT_0} = 0 \tag{5.6}$$

Pro změnu $\Delta S_{\mathcal{AB}}$ celkové tepelné entropie $S_{\mathcal{C}}$ v systému ohřívák $\mathcal{A}$ a chladník $\mathcal{B}$, tedy systému $(\mathcal{AB})$ během jednoho průchodu $\mathcal{L}$ cyklem $\mathcal{O}$ v důsledku aditivity (rovnovážných, vratných) změn tepelné entropie platí

$$\Delta S_{\mathcal{AB}} = -\frac{\Delta Q_0}{kT_W} + \frac{\Delta Q_0}{kT_0} = \frac{\Delta Q_0}{kT_0}\cdot\eta_{\max} = \frac{\Delta Q_W}{kT_W}\cdot\eta_{\max} \tag{5.7}$$

Pro *celkovou* změnu $\Delta S_{\mathcal{C}}$ tepelné entropie $S_{\mathcal{C}}$ celého vratného Carnotova stroje, izolovaného systému, v němž probíhá transformace tepelné energie ($\Delta Q_W \cong x \in A$) na mechanickou ($\Delta A \cong y \in B$) v důsledku aditivity (rovnovážných) změn tepelné entropie při použití vztahů (5.6) a (5.7) platí

$$\Delta S_{\mathcal{C}} = \Delta S_{\mathcal{L}} + \Delta S_{\mathcal{AB}} = \frac{\Delta Q_W}{kT_W}\cdot\eta_{\max} \tag{5.8}$$

[20]Je i maximem množiny transinformací vratných náhradních cyklů pro nevratné cykly s (extremálními) tepoltami $T_W,\ T_0$, tedy pro cykly s účinnostmi $\eta < \eta_{\max}$.

Z odvození (5.3) a z rovnosti (5.8) je pak zřejmé, že

$$\Delta S_{\mathcal{C}} - T(X;Y) = H(X) \cdot (\eta_{\max} - \eta_{\max}) \tag{5.9}$$

tedy

$$\Delta S_{\mathcal{C}} - \Delta \mathcal{I} = 0$$

nebo také

$$\Delta (S_{\mathcal{C}} - I) = 0$$

Celková změna $\Delta S_{\mathcal{C}}$ tepelné entropie $S_{\mathcal{C}}$, celého vratného Carnotova stroje definovaná vztahem (5.8) a výstupní informace $\Delta \mathcal{I}$ definovaná ve (5.1) vyhovují tedy ***Brillouinově*** [8, 44, 45] ***rozšířené*** formulaci II. hlavní věty termodynamické[21],

$$\Delta (S_{\mathcal{C}} - I) \geq 0 \quad \text{nebo} \quad \mathrm{d}(S_{\mathcal{C}} - I) \geq 0 \tag{5.10}$$

Vztah (5.9), tedy rovnost ve vztahu (5.10), platí pro přenosový, tj. *měřící, pozorovací vratný* (2.12), (2.13) proces $\mathcal{O}$ v $\mathcal{L}$ (přenosovou, měřící, záznamovou atp. proceduru modelovanou $\mathcal{O}$).

Popsaným procesem (měřením, záznamem, zpracováním, přenosem, atp.) libovolné vstupní zprávy $x \cong \Delta Q_W$ ze zdroje zpráv s hodnotě informační entropií $H(X)$ o hodnotě $\frac{\Delta Q_W}{kT_W}$, tedy zprávy o průměrném informačním množství $H(X)$ - změřením stavu (x) pozorovaného termodynamického systému $\mathcal{A}$, přesněji stavu systému $(\mathcal{AB})$ o dané tepelné entropii $S_{\mathcal{AB}}$ získáme výstupní zprávu $y \cong \Delta A$ o (průměrném) informačním množství $\Delta \mathcal{I} = H(Y)$. Za toto informační množství zde považujeme *teplotně* redukovanou *celkovou* práci ΔA vykonanou systémem $\mathcal{L}$ při teplotě T_W v rámci jednoho jeho průchodu podél celé křivky $\mathcal{O}$ z Obr. 2.1. To vyjadřujeme definicí (5.1) a předpokladem (4.15).

Celková změna $\Delta S_{\mathcal{C}}$ tepelné entropie $S_{\mathcal{C}}$ izolovaného systému, zde celého vratného Carnotova stroje, v němž získáváme průměrnou výstupní informaci $\Delta \mathcal{I}$, je tedy podle (5.9) rovna právě tomuto informačnímu množství $\Delta \mathcal{I}$.
Přijetím informace $\Delta \mathcal{I}$, tedy vzrůstem strukturovanosti výstupu změnou E_{P_W} o $\Delta E_{\mathrm{P}_W} = \Delta A$, jsme ale podle (5.8) snížili *rozlišitelnost* částí $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ (celého) pozorovaného systému $(\mathcal{AB})$, jeho strukturovanost (ve smyslu vzájemně různých obsahů tepel v $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$), a to právě o hodnotu $\Delta \mathcal{I} = \Delta S_{\mathcal{C}}$, což stanovují vztahy (5.9) a (5.10) se znaménkem rovnosti.

Zvyšováním strukturovanosti, *rozlišitelnosti* na mechanickém výstupu cyklu $\mathcal{O}$ v $\mathcal{L}$, tj. kanálu $\mathcal{K} \cong \mathcal{L}$, o hodnotu $\Delta \mathcal{I}$ tedy současně zvyšujeme *nerozlišitelnost* v jiné části celé izolované soustavy, v níž přenosový proces $\mathcal{O}$ probíhá. V tomto případě vzrůstá nerozlišitelnost částí $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ pozorovaného systému $(\mathcal{AB})$, a to právě o zisk

[21] *Informační* člen $\mathcal{I}$ se v tradičním (diferenciálním) vyjádření této hlavní věty, $\mathrm{d}S \geq 0$, nevyskytuje.

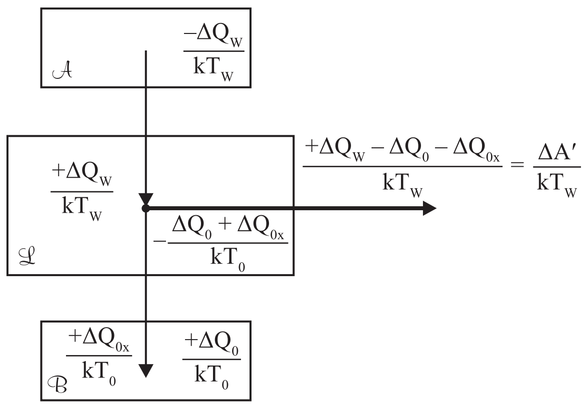
'výstupní' rozlišitelnosti $\Delta\mathcal{I}$ (5.9) a (5.10) se znaménkem rovnosti.

Lze tedy říci, v souladu se vztahy (5.9) a (5.10), že *realizace* ***měření ovlivňuje měřené*** [22]; pozorovaný systém $\mathcal{A}$ ztrácí teplo ΔQ_0.
V celé izolované soustavě vzroste entropie o (maximálně možnou) hodnotu ΔS_C; zde je to entropie systému $(\mathcal{AB})$.

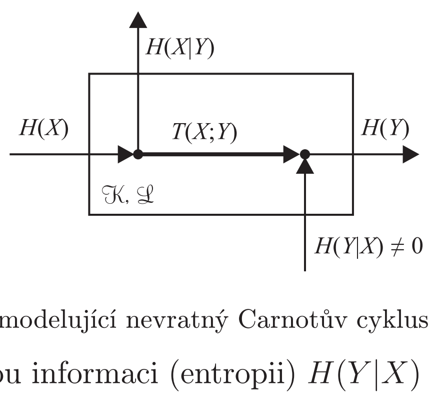
V následujícím oddíle si ukážeme, že měřené tj. $\mathcal{A}$ resp. $(\mathcal{AB})$ je ovlivněno nejen samotnou *organizací, definicí* měření [23] [zde (modelováno jako) cyklus $\mathcal{O}$ s $\Delta Q_{0x} = 0$], ale že výsledek (y) takto definovaného způsobu měření $(\mathcal{O})$ je ovlivněn i jeho *realizací* (tou bude nevratný cyklus O' s $\Delta Q_{0x} > 0$, probraný v odd. 2.3).

5.2 Nevratný Carnotův cyklus a přenosový kanál se šumem

Nevratný Carnotův cyklus $\mathcal{O}'$ [nevratnost je způsobena neideálností pracovní látky $\mathcal{L}$ a konečnou, nenulovou rychlostí oběhu látky $\mathcal{L}$ cyklem $\mathcal{O}'$ viz (2.14), (2.15)], přesněji pracovní látku $\mathcal{L}$, jejíž stavy tímto cyklem prochází, považujeme za termodynamický, středně-hodnotový model přenosového kanálu $\mathcal{K}$ se *šumem, rušením*, viz Obr. 5.3. a Obr. 5.4,



Obr. 5.3: Schema nevratného Carnotova cyklu



Obr. 5.4: Přenosový kanál modelující nevratný Carnotův cyklus

Pro průměrnou šumovou informaci (entropii) $H(Y|X)$ definovanou ve (4.6) a (4.10) platí $H(Y|X) \neq 0$.

Na kanále $\mathcal{K}$, jeho vstupech a výstupech, definujeme hodnoty změn průměrných informačních množství o velikostech $H(X)$, $H(Y)$, $H(X|Y)$ definovaných vztahy (4.5), (4.6) nebo (4.10), v souladu s označováním (4.36) a definicí (5.1), takto:

$$
\begin{aligned}
H(X) &\overset{\text{Def}}{=} \frac{\Delta Q_W}{kT_W}, && (5.11)\\
H(Y) &\overset{\text{Def}}{=} \frac{\Delta A'}{kT_W} = \frac{\Delta Q_W - \Delta Q_0 - \Delta Q_{0x}}{kT_W} = H(X)\cdot\eta_{\max} - \frac{\Delta Q_{0x}}{kT_W} = \\
&= \frac{\Delta Q_W}{kT_W}\cdot\eta = H(X)\cdot\eta \overset{\triangle}{=} \Delta\mathcal{I}' \\
H(X|Y) &\overset{\text{Def}}{=} \frac{\Delta Q_0}{kT_W}
\end{aligned}
$$

kde $H(X|Y)$ definujeme podle výsledku (5.3) pro vratný Carnotův cyklus $\mathcal{O}$ protože, jak bylo řečeno v odd. 2.3, nevratný Carnotův cyklus $\mathcal{O}'$ považujeme z hlediska mechanické práce $\Delta A'$ získané jedním průchodem látkou $\mathcal{L}$ tímto cyklem za aditivní *superpozici* jeho vratné části $\mathcal{O}$, kde platí (2.7), a části nevratné se *šumem, rušením* daném *produkcí* tepla $\Delta Q_{0x} > 0$ v látce $\mathcal{L}$ a jeho *odvodem* do $\mathcal{B}$ v izotermické kompresi $3'$ (tj. jeho disipací po stroji). To způsobuje platnost vztahu (2.20).

Předpokládáme tedy, že látka $\mathcal{L}$ procházející nevratným Carnotovým cyklem $\mathcal{O}'$ pracuje jako informační kanál $\mathcal{K}$ ($\mathcal{K} \cong \mathcal{L}$), přesněji cyklus $\mathcal{O}'$ je termodynamickým, středně-hodnotovým modelem přenosového procesu probíhajícího v kanále $\mathcal{K}$. Předpokládáme tedy, že pro hodnoty veličin $H(X)$, $H(Y)$, $H(X|Y)$, $H(Y|X)$ definovaných ve (5.11) platí rovnice (4.15), a tedy, podobně jako v odd. 4.1, že platí

$$
\frac{\Delta Q_W - \Delta Q_0 - \Delta Q_{0x}}{kT_W} - H(Y|X) = \frac{\Delta Q_W}{kT_W} - \frac{\Delta Q_0}{kT_W} \qquad (5.12)
$$

Zřejmě také platí

$$
\begin{aligned}
H(Y|X) &= -\frac{\Delta Q_{0x}}{kT_W} && (5.13)\\
H(Y|X) &= -\frac{\Delta Q_{0x}}{kT_0}\cdot\beta < 0, \quad \beta = \frac{T_0}{T_W},\ T_W > T_0 > 0
\end{aligned}
$$

Vztahy (5.13), vyjadřující průměrnou šumovou informaci (její změnu) $H(Y|X)$ v kanále $\mathcal{K} \cong \mathcal{L}$, jsou [při definicích (5.11)] v souladu se skutečností, že šumové teplo $\Delta Q_{0x} > 0$ musí být odváděno z látky $\mathcal{L}$ (znaménko $-$) při teplotě T_0, na úkor mechanické práce ΔA vzniklé při teplotě T_W z tepla ΔQ_W ve vratné části $\mathcal{O}$ cyklu $\mathcal{O}'$. To vyjadřuje jmenovatel prvního zlomku ve vztahu (5.13). Teplo ΔQ_{0x} představuje výše zmíněné *realizační ovlivnění* definice měření (modelované, realizované jako) $\mathcal{O}$.

Ze vztahů (5.13) a z rovnic (4.15) je zřejmé, že vztahy (5.11) jsme definovali přenosový kanál $\mathcal{K}$, se záporným aditivním, *subtraktivním* šumem $H(Y|X)$, $H(Y|X) < 0$, způsobeným odvodem tepla ΔQ_{0x} $(-Q_{0x} < 0)$ z látky $\mathcal{L}$ při $T_0 < T_W$. Tento šum způsobuje, vzhledem k (průměrné) ztrátě informace $H(X|Y)$ z přenášené (průměrné) informace $H(X)$ v libovolné vstupní zprávě $x \cong \Delta Q_W$ z vratné části $\mathcal{O}$ nevratného cyklu $\mathcal{O}'$, *další* (průměrnou) ztrátu informace $H(Y|X)$ [znaménko $-$ ve vztahu (5.13)].[22]

Pro hodnotu transinformace definované vztahy (4.13), podle definičních vztahů (5.11) a podle (5.13), platí maximum

$$T(X;Y) = \frac{\Delta Q_W}{kT_W} - \frac{\Delta Q_0}{kT_W} = \frac{\Delta Q_W}{kT_W} \cdot \eta_{\max} = H(X) \cdot \eta_{\max} \qquad (5.14)$$

ale také

$$T(Y;X) = \frac{\Delta Q_W - \Delta Q_0 - \Delta Q_{0x}}{kT_W} - \left(-\frac{\Delta Q_{0x}}{kT_W}\right) = H(X) \cdot \eta_{\max}$$

Levé strany rovnic ve (5.14) jsou si tedy rovny a odvozená hodnota transinformace vyhovuje požadavku symetričnosti (4.14). Je ale také zřejmé, že vztahy (5.14) jsou vztahy (5.3) pro bezšumový přenos.
Z definic (5.11) a ze vztahů (5.14) vyplývají vztahy

$$\begin{array}{llll} \Delta\mathcal{I}' = T(X;Y) & \text{pokud} & \Delta Q_{0x} = 0, & \text{tehdy } \Delta\mathcal{I}' = \Delta\mathcal{I} \\ \Delta\mathcal{I}' < T(X;Y) & \text{pokud} & \Delta Q_{0x} > 0, & \text{tehdy } \Delta\mathcal{I}' < \Delta\mathcal{I} \end{array} \qquad (5.15)$$

Transinformace $T(X;Y)$ je tedy, v souladu s její definicí, při zvoleném významu veličin $H(\cdot)$, $H(\cdot|\cdot)$, *maximálním* (průměrným) množstvím informace, které lze cyklem Carnotovým, vratným $(\mathcal{O})$ nebo nevratným $(\mathcal{O}')$ a podle druhé části Carnotovy věty, tedy i *jakýmkoli jiným* tepelným cyklem v látce $\mathcal{L}$ s (extremálními) pracovními teplotami T_W, T_0, $T_W \geq T_0 > 0$, chápaným jako přenosový proces v kanálu $\mathcal{K} \cong \mathcal{L}$, při daném $H(X)$, obdržet. Ostrá nerovnost pro $\Delta\mathcal{I}'$ ve (5.15) je důsledkem Carnotovy věty (druhé části). Nerovnosti

$$\Delta\mathcal{I}' \leq T(X;Y) < H(X) \qquad (5.16)$$

srovnej (5.4) a (5.15), pak jsou [podle (5.11) a za předpokladu (4.15)] *informační formulací* věty Thomsonovy-Planckovy a Carnotovy věty (její druhé části [<] i první části [=]), a tedy jsou *informační formulací* II. hlavní věty termodynamické.

Protože hodnota $\eta_{\max}$ je maximem (supremem) množiny hodnot účinností η [když uvažujeme nekonstantní teploty Θ_W a Θ_0 s extrémy T_W a T_0; pokud bychom uvažovali nevratnost při daných teplotách T_W a T_0, pak by platilo $\eta \to \eta_{\max}$, pokud by platilo $\Delta Q_{0x} \to 0$, resp. $\Delta t \to \infty$], je zřejmé, že $T(X;Y) \stackrel{\triangle}{=} T_{\max}(X;Y)$ a tedy,

[22] Celkové zkreslení informace $H'(X)$ při přenosu zprávy x, kódované jako vstupní teplo ΔQ, popsaném vztahy (5.11) a (5.13), je pak určeno rovností $H'(X) = H(X|Y) + |H(Y|X)|$.

v souladu s definicí informační kapacity jakožto maxima (suprema) množiny hodnot transinformací, je naše transinformace $T(X;Y)$ kapacitou kanálu při daných extremálních teplotách T_W a T_0. Tedy definujeme[23]

$$C_{T_W,T_0} \stackrel{\text{Def}}{=} T(X;Y) \tag{5.17}$$

Je to ale i informační kapacita a průměrná výstupní informace bezšumového kanálu z odd. 5.1 (je počítána na množině všech tepelných cyklů s extremálními, mezními teplotami $T_W \geq T_0 > 0$).

Pro změnu $\Delta S_{\mathcal{L}}$ celkové tepelné entropie $S_{\mathcal{C}}$ celého nevratného Carnotova stroje v látce $\mathcal{L}$ během jednoho průchodu jejích stavů nevratným cyklem $\mathcal{O}'$ podle (2.21) platí

$$\begin{aligned} \Delta S_{\mathcal{L}} = \oint_{\mathcal{O}'} \frac{\delta Q}{T} &= \frac{\Delta Q_W}{kT_W} - \frac{\Delta Q'_0}{kT_0} \\ &= \frac{\Delta Q_W}{kT_W} - \frac{\Delta Q_0 + \Delta Q_{0x}}{kT_0} \\ &= -\frac{\Delta Q_{0x}}{kT_0} < 0 \end{aligned} \tag{5.18}$$

a podle (5.13) lze psát, informačně,

$$\Delta S_{\mathcal{L}} = H(Y|X) \cdot \beta^{-1}, \quad \beta = \frac{T_0}{T_W}, \ T_W \geq T_0 > 0$$

[23]Ze (5.14), (5.15) a (2.24) je zřejmé, že je-li $H(X) = H_{\max}(X)$ pak, při daných T_W a T_0,

$$T(X;Y) = H_{\max}(X) \cdot \eta_{\max} \stackrel{\triangle}{=} T'_{\max}(X;Y)$$

Toto maximum bereme přes všechna možná rozdělení vstupní náhodné veličiny X při daném fyzikálním šumu v kanále generujícím teplo ΔQ_{0x} a daných teplotách T_W a T_0. Tedy *informační kapacita* $C_{\mathcal{K}}^{[T_W,T_0]}$ přenosového kanálu $\mathcal{K}$ realizovaného látkou $\mathcal{L}$ procházející tepelným cyklem, zde cyklem $\mathcal{O}'$, může být [v souladu s definicí informační kapacity, je-li $H(X) = H_{\max}(X)$ entropií vstupního rozdělení maximalizujícího $T(X;Y)$ vzhledem k šumům v kanále při teplotách T_W, T_0] definována rovností

$$C_{\mathcal{K},[T_W,T_0]} \stackrel{\text{Def}}{=} T'_{\max}(X;Y) = H_{\max}(X) \cdot \eta_{\max},$$

tedy maximální možnou transinformací přenosu v bezšumovém kanálu realizovaném látkou $\mathcal{L}$ s vratným cyklem $\mathcal{O}$ při konstantních T_0 a T_W. Ta ale je i informační kapacitou bezšumového kanálu. Zřejmě

$$C_{\mathcal{K},\max} = H_{\max}(X)$$

Protože ale hodnoty $H(X)$ a $T(X;Y)$ jsou pro zvolenou $\eta_{\max}$ a dané konstantní T_W, ΔQ, resp. T_0, ΔQ_0 *jediné*, je zřejmé, že $T(X;Y) = T'_{\max}(X;Y)$ vždy, a tedy transinformace $T(X;Y)$ je kapacitou C_{T_W,T_0}. Maximální kapacity, nejlepšího přenosu tedy dosahujeme při $\eta_{\max} = 1$, tedy např. pro $\Delta Q_0 = 0$, $\Delta Q_{0x} = 0$. Tehdy $H(X) = H(Y)$. Je zřejmé, že rovnost $H(X) = H(Y)$ je reálně nedosažitelná, v našem přenosovém systému vždy platí, že $H(Y|X) < 0$ a $H(X|Y) > 0$.

Výraz $\dfrac{\Delta Q_W}{T_W}$ je hodnotou funkcionálu informační entropie přes všechna možná rozdělení zdroje zpráv maximalizující transinformaci $T(X;Y)$.

Pro změnu $\Delta S_{\mathcal{AB}}$ celkové tepelné entropie $S_{\mathcal{C}}$ v systému $(\mathcal{AB})$ (v systému ohřívák $\mathcal{A}$ a chladník $\mathcal{B}$), během jednoho průchodu stavů $\mathcal{L}$ nevratným cyklem $\mathcal{O}'$ v důsledku aditivity (vratně uvažovaných, *náhradních* [57] změn) tepelné entropie platí

$$\begin{aligned} \Delta S_{\mathcal{AB}} &= -\frac{\Delta Q_0}{kT_W} + \frac{\Delta Q_0}{kT_0} + \frac{\Delta Q_{0x}}{kT_0} \\ &= \frac{\Delta Q_W}{kT_W} \cdot \eta_{\max} + \frac{\Delta Q_{0x}}{kT_0} \end{aligned} \tag{5.19}$$

Podle (5.13) a (5.14), informačně,

$$\begin{aligned} \Delta S_{\mathcal{AB}} &= T(X;Y) - H(Y|X) \cdot \beta^{-1} = T(X;Y) - \Delta S_{\mathcal{L}} \\ & \beta = \frac{T_0}{T_W}, \ T_W \geq T_0 > 0 \end{aligned}$$

Pro celkovou změnu $\Delta S_{\mathcal{C}}$ tepelné entropie $S_{\mathcal{C}}$ celého nevratného Carnotova stroje, izolovaného systému, v němž probíhá transformace tepelné energie ($\Delta Q_W \cong x \in A$) na mechanickou práci ($\Delta A' \cong y \in B$) v důsledku aditivity (vratně uvažovaných, náhradních změn) tepelné entropie při použití (5.18) a (5.19) platí

$$\begin{aligned} \Delta S_{\mathcal{C}} &= \Delta S_{\mathcal{L}} + \Delta S_{\mathcal{AB}} \\ &= -\frac{\Delta Q_{0x}}{kT_0} + \left(\frac{\Delta Q_W}{kT_W} \cdot \eta_{\max} + \frac{\Delta Q_{0x}}{kT_0} \right) \\ &= \frac{\Delta Q_W}{kT_W} \cdot \eta_{\max} \end{aligned} \tag{5.20}$$

a podle (5.14) lze psát, informačně

$$\Delta S_{\mathcal{C}} = H(X) \cdot \eta_{\max} = T(X;Y) = C_{T_W,T_0}$$

Vztah (5.20) pro celkovou změnu $\Delta S_{\mathcal{C}}$ tepelné entropie $S_{\mathcal{C}}$ celého nevratného Carnotova stroje, $\Delta Q_{0x} > 0$, jímž realizujeme, popisujeme (šumový) přenos libovolné vstupní zprávy x ze zdroje zpráv o informační entropii $H(X) = \dfrac{\Delta Q_W}{kT_W}$, kódované jako teplo ΔQ_W, je tedy stejný jako při bezšumovém přenosu vratným Carnotovým strojem, rovnost (5.8). Ze vztahů (5.15) a (5.20) ihned plyne

$$\Delta S_C - \Delta \mathcal{I}' \ > \ 0 \ \text{ nebo také } \ \Delta(S_C - \mathcal{I}') > 0. \tag{5.21}$$

Případ s $\Delta Q_{0x} = 0$ je řešen v odd. 5.1, vztah (5.9).

Z nerovnosti (5.21) je patrné, že celková změna $\Delta S_{\mathcal{C}}$ tepelné entropie $S_{\mathcal{C}}$ celého nevratného Carnotova stroje vyjádřená vztahy (5.20) a (průměrná) výstupní informace $\Delta \mathcal{I}'$ definovaná ve (5.11) vyhovují Brillouinově [8] *rozšířené formulaci* II. hlavní věty termodynamické,

$$\mathrm{d}(S_{\mathcal{C}} - I') \geq 0 \tag{5.22}$$

To je zřejmé ze vztahu (5.20) a z definičních vztahů (5.11), pomocí nichž lze pro nerovnost (5.21) psát

$$\begin{aligned} \Delta S_{\mathcal{C}} - \Delta \mathcal{I}' &= H(X)\cdot\eta_{\max} - H(X)\cdot\eta \qquad (5.23)\\ &= H(X)\cdot\eta_{\max} - \left(H(X)\cdot\eta_{\max} - \frac{\Delta Q_{0x}}{kT_W}\right)\\ &= \frac{\Delta Q_{0x}}{kT_W} > 0 \end{aligned}$$

Podle (5.18) lze psát, informačně

$$\Delta S_{\mathcal{C}} - \Delta \mathcal{I}' = |H(Y|X)|\cdot\beta = |\Delta S_{\mathcal{L}}|\cdot\beta, \quad \beta = \frac{T_0}{T_W}$$

Celková změna $\Delta S_{\mathcal{C}}$ tepelné entropie $S_{\mathcal{C}}$ izolované *přenosové* soustavy, obsahující nevratný Carnotův stroj (nebo tvořená tímto strojem), je *větší* než na výstupu tohoto stroje měřená, jím (v této soustavě) přenesená (průměrná) informace $\Delta\mathcal{I}'$. Přenos informace je v tomto případě horší než v případě vratném, bezšumovém právě o rozdíl (5.23). Podle (5.20) je totiž $\Delta S_{\mathcal{C}} = \Delta\mathcal{I} = T(X;Y)$. Přímo z definice (5.11) a podle (2.25) lze totiž psát

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{I} - \Delta\mathcal{I}' &= \frac{\Delta Q_W}{kT_W}\cdot(\eta_{\max} - \eta) \qquad (5.24)\\ &= H(X)\cdot\left[\eta_{\max} - \left(\eta_{\max} - \frac{\Delta Q_{0x}}{\Delta Q_W}\right)\right]\\ &= \frac{\Delta Q_W}{kT_W}\cdot\frac{\Delta Q_{0x}}{\Delta Q_W} = \frac{\Delta Q_{0x}}{kT_W} > 0 \end{aligned}$$

Rovnost levých stran v (5.23) a (5.24) je zřejmá.

Pro $\Delta\mathcal{I}'$ lze podle definice (5.11) a podle (2.25) psát

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{I}' &= \frac{\Delta Q_W}{kT_W}\cdot\eta_{\max} - \frac{\Delta Q_{0x}}{kT_W} \qquad (5.25)\\ &= \frac{\Delta Q_W}{kT_W}\cdot\eta_{\max} - \frac{\Delta Q_{0x}}{kT_0}\cdot\beta \end{aligned}$$

Podle (5.18), informačně,

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{I}' &= H(X)\cdot\eta_{\max} + \Delta S_{\mathcal{L}}\cdot\beta = C_{T_W,T_0} + \Delta S_{\mathcal{L}}\cdot\beta\\ &= T(X;Y) - |\Delta S_{\mathcal{L}}|\cdot\beta = T(X;Y) + \Delta S_{\mathcal{L}}\cdot\beta \end{aligned}$$

Veličinu $|\Delta S_{\mathcal{L}}|$ nazýváme *produkce tepelné entropie* látkou $\mathcal{L}$ *v cyklu* $\mathcal{O}'$.

Ze vztahů (5.25) je zřejmé, že strukturovanost mechanického výstupu, tedy velikost v cyklu získaného přírůstku ΔE_{P_W} potenciální energie E_{P_W}, vyjádřená hodnotou veličiny $\Delta\mathcal{I}'$, se v případě cyklu $\mathcal{O}'$ (nevratného) v látce $\mathcal{L}$ ještě zmenší o hodnotu

$|\Delta S_{\mathcal{L}}| \cdot \beta$ ve srovnání s $\mathcal{O}$. Tedy existuje *šumový, rušivý* výstup, odčerpávající přenesenou informaci z maxima[24]

$$\Delta \mathcal{I} = T(X;Y) = H(X) \cdot \eta_{\max} = C_{T_W,T_0}$$

na hodnotu

$$\Delta \mathcal{I}' = H(X) \cdot \eta < T(X;Y)$$

viz Carnotova věta (druhá část).
V našem případě 'carnotizovaných' přenosů informace, tj. v případě *Carnotova přenosového* systému, Carnotova stroje chápaného jako 'shannonovský' přenosový řetězec (přenosová soustava), platí

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{I}' < T(X;Y), &\quad \text{pokud} \quad \eta < \eta_{\max}, \quad \Delta \mathcal{I}' = H(X) \cdot \eta \\ \Delta \mathcal{I}' = \Delta \mathcal{I} = T(X;Y), &\quad \text{pokud} \quad \eta = \eta_{\max}, \quad \Delta \mathcal{I}' = H(X) \cdot \eta_{\max} \end{aligned} \tag{5.26}$$

přitom vždy

$$T(X;Y) = H(X) \cdot \eta_{\max} \tag{5.27}$$

viz Carnotova věta (první část).
Je zřejmé, že dosažení rovností ve (5.26) nebo *dokonalé* přenesení libovolné vstupní zprávy $x \cong \Delta Q_W$, s průměrným informačním množstvím $H(X)$ [definovaným ve (6.19) nebo (5.11)], tj. dosažení rovnosti (5.27) pro $\eta_{\max} = 1$, tedy dosažení rovnosti

$$T(X;Y) = H(X) \tag{5.28}$$

přenosovým kanálem $\mathcal{K}$, umožňujícím *opakovatelnost* přenosu informace realizovaného, vyjádřeného, popsaného procesem transformace tepelné energie, jsou v důsledku platnosti II. hlavní věty termodynamické limitní, reálně nedosažitelné případy. Zde kanál $\mathcal{K}$ je termodynamický systém $\mathcal{L}$ s Carnotovým cyklem vratným ($\mathcal{O}$) nebo nevratným (O'), obecně *libovolným* tepelným *cyklem* mezi uvažovanými teplotami $T_W \geq T_0 > 0$. Rovnosti ve vztahu (5.26) dosahujeme pro

$$\Delta t \to \infty \quad \text{tedy pro} \quad \eta \to \eta_{\max} \tag{5.29}$$

viz vztahy (2.12) a (2.13), rovnosti (5.28) dosahujeme pro[24]

$$\eta_{\max} \to 1, \quad \text{tedy pro} \quad T_W \to \infty, \quad \text{nebo} \quad T_0 \to 0 \tag{5.30}$$

[24]V našem případě přenosu informace, tj. v případě *Carnotova přenosového systému*, Carnotova stroje chápaného jako přenosový řetězec, vždy platí

$$H(Y) \leq = \Delta \mathcal{I} = T(X;Y) = H(X) \cdot \eta_{\max}$$

a tedy

$$\begin{aligned} T(X;Y) < H(X), &\quad \text{pokud} \quad \eta_{[max]} < 1 \\ T(X;Y) = H(X), &\quad \text{pokud} \quad \eta_{[max]} = 1 \end{aligned}$$

[24]Srovnej se vztahy (2.14) a (2.15).

V případě vratné i nevratné 'carnotizace' shannonovského přenosového řetězce platí tedy rozšířená (Brillouinova) formulace II. hlavní věty termodynamické

$$\mathrm{d}(S_{\mathcal{C}} - \mathcal{I}') \geq 0$$

Přitom $\mathrm{d}S_{\mathcal{C}}$ je celková změna (totální diferenciál) tepelné entropie $S_{\mathcal{C}}$ toho prostředí, v němž dochází k (takto realizovanému) přenosu, záznamu, zpracování informace.
Ukázali jsme tedy, že tato formulace II. hlavní věty termodynamické s informačním členem platí i pro 'obyčejný' tepelný cyklus, u něhož se běžně tento informační člen nevnímá.
Tato formulace pak vyjadřuje skutečnost, že proces jakéhokoli zpracování informace v prostoru nebo čase (záznam, výpočet, měření, krátce jakýkoli přenos informace realizovaný cyklickou transformací energie tepelné o extremálních teplotách T_W a T_0) vede ke vzrůstu termodynamické entropie $S_{\mathcal{C}}$ širší izolovoné soustavy, v níž toto zpracování probíhá, a to tak, že po proběhnuvším zpracování pro přírůstek $\Delta S_{\mathcal{C}}$ této celkové entropie $S_{\mathcal{C}}$ a zpracovanou informaci $\Delta\mathcal{I}'$ platí

$$\Delta S_{\mathcal{C}} \geq \Delta\mathcal{I}' \geq 0 \ \text{ kde } \ \Delta S_{\mathcal{C}} = \Delta\mathcal{I} = H(X) \cdot \eta_{\max}$$

Rovnost $\Delta\mathcal{I}' = \Delta\mathcal{I}$ platí jen v soustavě *nedisipativní* [44] kde $\Delta Q_{0x} = 0$.

V předcházejících kapitolách a oddílech jsme prostudovali *středně-hodnotový*, termodynamicky realizovaný model přenosu informace a došli jsme k následujícím tvrzením [22, 23]:
Ani při *bezšumovém*, ale *opakovatelném*, přenosu zprávy (x) ze vstupu informačního kanálu $\mathcal{K}$ na jeho výstup, tedy i v případě nepřítomnosti jakýchkoli rušení (šumů) *reálnými* fyzikálními vlastnostmi přenosového kanálu $\mathcal{K}$, pokud jej realizujeme vratným cyklickým procesem transformace tepelné energie $\Delta Q_W \cong x \in A$ na mechanickou $\Delta A \cong y \in B$ (přímým vratným Carnotovým cyklem $\mathcal{O}$ v látce $\mathcal{L} \cong \mathcal{K}$, tedy při $H(Y|X) = 0$, tj. při $\Delta Q_{0x} = 0$) *nelze* (v průměru), v důsledku platnosti I. a II. hlavní věty termodynamické, jimiž se tento přenosový (transformační) proces řídí ($0 < \eta_{\max} < 1$, $\Delta S_{\mathcal{C}} > 0$), tuto zprávu předat *beze ztráty* v ní obsaženého (průměrného) informačního množství; tato ztráta je důsledkem *opakovatelnosti*, tedy cykličnosti takového procesu. Zmenšení původního (vstupního, přenášeného) půměrného informačního množství $H(X)$ o hodnotu $H(X|Y) = H(X)\cdot\beta$, $\beta = \dfrac{T_0}{T_W}$, $T_W \geq T_0 > 0$, je tedy od (našeho *termodynamicky*) realizovaného, opakovatelného přenosu informace *neoddělitelné*; je jeho *nutnou* podmínkou:

opakovatelnost přenosu informace => ***(průměrná) ztráta informace***

Je to podmínka fungování cyklu (přenosu $\mathcal{O}$) transformujícího vstupní energii (kódující x) na výstupní energii (kódující y), vyjádřená vztahem (2.7) fyzikálně a vztahem

$$T(X;Y) < H(X) \tag{5.31}$$

informačně. V informačním pojetí je to tedy podmínka opakovatelného, cyklického fungování informačního kanálu $\mathcal{K}$, v němž dochází k přenosu (průměrné) vstupní informace $H(X)$ obsažené ve vstupním x a přijetí výstupní (průměrné) informace $H(Y)$ obsažené ve výstupním y. Naše tvrzení

$$H(Y) \ < \ H(X) \tag{5.32}$$

je tak ***informační formulací Thomsonovy-Planckovy formulace*** II. hlavní věty termodynamické a tvrzení

$$T(X;Y) \ = \ H(Y) \tag{5.33}$$

je ***informační obdobou první části Carnotovy věty***.

Je-li $H(Y|X) < 0$, tedy platí-li vztahy (2.20), resp. (2.21), platí ***informační obdoba druhé části Carnotovy věty*** (ale i ***informační formulace Kelvinova znění*** II. hlavní věty termodynamické pro nevratné cyklické děje)

$$H(Y) \ < \ T(X;Y) \tag{5.34}$$

Ze vztahů (5.31) až (5.34) vyplývá nerovnost

$$H(Y) \leq T(X;Y) < H(X) \tag{5.35}$$

kterou tak lze považovat za ***úplnou informační formulaci*** II. hlavní věty termodynamické.

Rovněž se jedná o fyzikální (termodynamické) zdůvodnění tzv. *Data Processing Enequality* [9],

$$H(X) \geq H(Y) \geq H(Z) \tag{5.36}$$

platné pro přenos informace ze zdroje X do cíle Z přes 'mezipříjem' Y, neboť výstupní práci cyklu lze celou přeměnit třením v teplo ohříváku dalšího stroje atd.

V důsledku toho lze říci, že přenos *vázané* [8] informace podléhá II. hlavní větě termodynamické a že tuto informaci lze (v průměru) přenášet beze ztrát jen v případě $\eta_{[max]} = 1;\ \ \Delta Q_0 \to 0, \Delta Q_{0x} \to 0.$[25]
Obecněji by se hovořilo o principu růstu *extenzity* všech energií *přímo se sdílejících* v dané izolované soustavě. Mohli bychom uvažovat i jinou, tzv. *přímo se sdílející* energii, než je energie tepelná a namísto jenom pojmu *tepelná entropie* bychom navíc hovořili o principu *růstu extenzity* uvažované energie [18]; růst tepelné extenzity (termodynamické entropie, 'tepelná nevratnost') by se pak projevoval jen generováním a disipací šumového tepla, např. na elektrických odporech nebo třením apod. Viz Dodatky 8.1.

Podle Shannonova kódovacího teorému kanálu nelze chybovost β přenosu, a tedy

[25]V limitních případech platí $T_W \to \infty, \Delta Q_W \to \infty; T_0 \to 0, \Delta Q_{0x} \to 0.$

i chyby $p(\cdot|\cdot)$, *libovolně stlačit* k nule, pokud $H(X) \geq C_{\mathcal{K}}$. To je ale náš případ 'carnotizovaného' přenosu informace.

Podle Brillouina a Landauera [8, 48] je třeba pro přenos, uchování nebo zpracování každého bitu zprávy probíhajících nevratně, uvnitř systému se vzrůstající entropií ($\Delta S_{\mathcal{C}} > 0$) a při teplotě Θ, vynaložit energii

$$\Delta W_1 > 1 \cdot k \cdot \Theta \cdot \ln 2 \tag{5.37}$$

Tedy pro zprávu o n znacích [m bitech, $m = m(n)$ je rostoucí funkce n] platí

$$\Delta W > m(n) \cdot k \cdot \Theta \cdot \ln 2 \tag{5.38}$$

kde výraz $m(n) \cdot k \cdot \Theta \cdot \ln 2$ představuje tepelnou disipaci při zmíněných procesech (vznik tepla ΔQ_{0x} a rozptyl tepla $\Delta Q_0 + \Delta Q_{0x}$ po stroji (2.25) až (2.27)). Tedy

$$\lim_{n\to\infty} \Delta W = \lim_{n\to\infty} m(n) \cdot k \cdot \Theta \cdot \ln 2 = \infty \tag{5.39}$$

Tento případ je ale v souladu s naším požadavkem limitní rovnosti [26]

$$\Delta W \stackrel{\triangle}{=} \Delta Q_W = \Delta A \tag{5.40}$$

Lze říci, že náš termodynamický model opakovatelného přenosu informace (termodunamicky realizovaný přenos informace) není v rozporu se známými vlastnostmi a požadavky jak pro tepelný cyklus, tak pro informační kanál.

V uvedeném ('carnotizovaném') Carnotově) přenosovém systému vždy platí

$$H(X) > C_{T_W,T_0} = H(X) \cdot \eta_{\max} = T(X;Y),\ \eta_{\max} \in < 0, 1) \tag{5.41}$$

Dosáhnout v něm rovnosti $H(X) = H(Y)$ je možno když jako kód vstupní zprávy použijeme nekonečně velkou *energii*, $\Delta Q[m(n)] \to \infty$, $\eta_{[max]} \to 1$ nebo při $T_0 \to 0$.[27]

---

[26] Resp.

$$\eta_{\max} = 1 \text{ pro } H(X|Y) = 0 \text{ a } \frac{\Delta Q_{0x}}{\Delta Q} = 0$$

přesněji

$$\eta_{\max} \to 1,\ \Delta Q_W \to \infty;\ \eta \to 1,\ \Delta Q_W \to \infty,\ \frac{\Delta Q_{0x}}{\Delta Q} \to 0$$

Stejné platí pro T_W

$$\eta_{\max} \to 1,\ T_W \to \infty;\ \eta \to 1,\ T_W \to \infty,\ \frac{\Delta Q_{0x}}{kT_W} \to 0$$

$$\eta_{\max} \to 1,\ T_0 \to 0;\ \eta \to 1,\ T_W \to \infty,\ \Delta Q_{0x} \to 0$$

[27] Ze vztahu $\lim_{\eta_{[max]}\to 1} |H(X) - H(Y)| = 0$ je ale zřejmé, že lze snižovatm nenulovou chybovost přenosu změnou parametrů T_W, T_0 (resp. ΔQ_W, ΔQ_0) přenosové soustavy (Carnotova stroje), samozřejmě při splnění požadavku $\dfrac{\Delta Q_W}{kT_W} = H(X) =$ konst Jedná se pak ale o různé stroje. Při jakýchkoli daných teplotách $T_W > T_0$ ale vždy platí vztahy (5.31) až (5.34).

Shannonův kódovací teorém kanálu je *tedy rovněž* ***informační formulací Thomsonovy-Planckovy (Carnotovy) věty***, a tedy je další z mnoha formulací II. hlavní věty termodynamické.

5.3 Reverzní vratný Carnotův cyklus a přenosový kanál

Reverzní vratný Carnotův cyklus pracuje jako *tepelné čerpadlo* popsané v odd. 2.2. V tomto cyklu, pojímaném jako středně-hodnotový model přenosového procesu v kanále $\mathcal{K} \cong \mathcal{L}$ přenášejícího (libovolnou) vstupní zprávu $x \in X$ o průměrném informačním množství $H(X)$, označujeme symboly

ΔQ_0 teplo odebírané z chladníku $\mathcal{B}$ izotermickou expanzí při T_0,

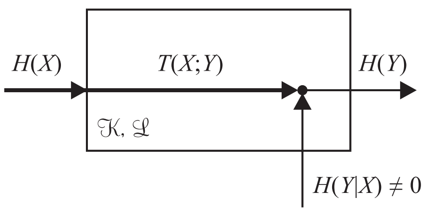
ΔA mechanickou práci dodanou cyklu izotermickou kompresí při teplotě T_W,

ΔQ_W výstupní teplo dodané do ohříváku $\mathcal{A}$ izotermickou kompresí při teplotě T_W

Dále, změnami fyzikálních entropií cyklu, definujeme hodnoty změn informačních entropií na přenosovém kanálu $\mathcal{K} \cong \mathcal{L}$ (s přenosovým procesem tímto cyklem realizovaným), např. takto:

$$
\begin{aligned}
H(X) &\overset{\text{Def}}{=} \frac{\Delta A}{kT_W}, \quad \text{vstupní entropie,} \\
&\ \Delta A \cong x \quad \text{vstupní zpráva;} \\
H(Y) &\overset{\text{Def}}{=} \frac{\Delta Q_W}{kT_W} = \frac{\Delta Q_0 + \Delta A}{kT_W} \triangleq \Delta \mathcal{I}, \quad \text{výstupní entropie,} \\
&\ \Delta Q_W \cong y \quad \text{výstupní zpráva;} \\
H(Y|X) &\overset{\text{Def}}{=} \frac{\Delta Q_0}{kT_W} > 0, \quad \text{šumová entropie,} \\
&\ \Delta Q_0 \quad \text{šumová 'zpráva'.}
\end{aligned}
\tag{5.42}
$$

Bude se tedy jednat o kanál s *aditivními* šumy (rušením), Obr. 5.5.



Obr. 5.5: Přenosový kanál modelující reverzní vratný Carnotův cyklus

Zřejmě platí

$$
H(Y|X) = \frac{\Delta Q_0}{kT_W} \cdot \frac{T_0}{T_0} = \frac{\Delta Q_0}{kT_0} \cdot \beta = \frac{\Delta Q_W}{kT_W} \cdot \beta = H(Y) \cdot \beta, \; \beta = \frac{T_0}{T_W} \tag{5.43}
$$

Šum o entropii $H(Y|X)$ je součástí definice přenosu informace. Nevzniká kladnou produkcí tepla ΔQ_{0x} v pracovní látce $\mathcal{L}$[28].
Dále předpokládáme, že pro změny hodnot informací o velikostech $H(X)$, $H(Y|X)$, $H(Y)$, $H(X|Y)$ definovaných vztahy (5.42) platí vztahy (4.15), tedy že platí

$$\frac{\Delta A}{kT_W} - H(X|Y) = \frac{\Delta Q_0 + \Delta A}{kT_W} - \frac{\Delta Q_0}{kT_W} \tag{5.44}$$

a tedy

$$H(X|Y) \overset{\text{Def}}{=} 0$$

Jedná se tedy o kanál *beze ztrát*. Pro transinformaci $T(X;Y)$, $T(Y;X)$ pak při definici (5.42) platí

$$T(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = \frac{\Delta A}{kT_W} - 0 = H(X) \tag{5.45}$$

a také

$$T(Y;X) = H(Y) - H(Y|X) = \frac{\Delta Q_0 + \Delta A}{kT_W} - \frac{\Delta Q_0}{kT_W} = \frac{\Delta A}{kT_W} = H(X) \tag{5.46}$$

Levé strany odvození (5.45) a (5.46) se tedy rovnají a platí tedy pro hodnoty informací definovaných vztahy (5.42) a výsledek odvození (5.44), rovnice (4.15) pro zachování informací (jak průměrných, informačních entropií, tak 'okamžitých') v kanálu. (V rámci jednoho průchodu systému $\mathcal{L} \cong \mathcal{K}$ reverzním Carnotovým cyklem realizujícím přenosový proces.)
Zřejmě platí

$$\frac{H(X)}{H(Y)} = \frac{\frac{\Delta A}{kT_W}}{\frac{\Delta Q_W}{kT_W}} = \frac{\Delta A}{\Delta A + \Delta Q_0} = \eta_{\max} \tag{5.47}$$

a tedy

$$H(X) = H(Y) \cdot \eta_{\max} \tag{5.48}$$

kde $\eta_{\max}$ je účinnost cyklu pracujícího v přímém směru. Platí tedy, v souladu se vztahy (5.43) a (5.46),

$$T(X;Y) = H(Y) \cdot \eta_{\max} \tag{5.49}$$

Povšimněme si nyní změn termodynamické entropie v izolovaném systému, v němž probíhá právě popsaný proces:

$$\begin{aligned} \Delta S_{\mathcal{AB}} &= \frac{-\Delta Q_0}{kT_0} + \frac{\Delta Q_0}{kT_W} = \frac{-\Delta Q_0}{T_0 T_W} \cdot \frac{T_W - T_0}{k} \\ &= \frac{-\Delta Q_0}{kT_0} \cdot \eta_{\max} = -H(Y) \cdot \eta_{\max} < 0 \end{aligned} \tag{5.50}$$

[28]Ze vztahů pro η a $\eta_{\max}$ vyplývá, že $\Delta Q_0 = f(T_0)$, kde funkce $f(\cdot)$ je nezápornou funkcí argumentu T_0, $f(T_0) \geq 0$, pro kterou platí $\lim\limits_{T_0 \to 0} f(T_0) = 0$.

Termodynamická (Clausiova) entropie $S_{\mathcal{AB}}$ systému $\mathcal{AB}$ tedy klesá - zvětšuje se (termodynamická, tepelná) rozlišitelnost systémů $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$. Je to ovšem na úkor dodané práce ΔA resp. entropie o velikosti $\frac{\Delta A}{kT_W}$. Nicméně je třeba tuto energii (entropii) získat. To je ale v rámci takové izolované soustavy možné jen *nepřirozeným*[29] procesem přeměny tepla v tuto mechanickou energii. Tento proces ale 'běží' na pozadí *přirozeného* procesu[29] přechodu tepla podle II. hlavní věty termodynamické.
Uvažujme takový vratný proces dodávající mechanickou práci o velikosti $\Delta A^* = |\Delta A|$; píšeme tak s ohledem na různé směry fungování obou cyklů, $\Delta A^* \geq 0$, $\Delta A \leq 0$;

$$\begin{aligned} \frac{\Delta A^*}{kT_W^*} = H(X^*) \cdot {\eta_{\max}}^* &= H(X^*) \cdot \frac{T_W^* - T_0^*}{T_W^*} = \Delta S_{\mathcal{A}^*\mathcal{B}^*}, \quad T_W^* \geq T_0^* > 0 \quad (5.51) \\ \frac{\Delta A}{kT_W^*} = H(X) \cdot \eta_{\max} &= H(X) \cdot \frac{T_W - T_0}{T_W} = \Delta S_{\mathcal{AB}}, \quad T_W \geq T_0 > 0 \end{aligned}$$

Pro celkovou změnu ΔS entropie S celé izolované soustavy, v níž oba procesy probíhají, platí podle II. hlavní věty termodynamické

$$\Delta S = \Delta S_{\mathcal{A}^*\mathcal{B}^*} + \Delta S_{\mathcal{AB}} \geq 0 \tag{5.52}$$

Protože ale $\Delta S_{\mathcal{AB}} \leq 0$, musí platit

$$\Delta S_{\mathcal{A}^*\mathcal{B}^*} \geq |\Delta S_{\mathcal{AB}}| \tag{5.53}$$

To znamená, že k poklesu entropie o $|\Delta S_{\mathcal{AB}}|$ je třeba 'vygenerovat' větší přírůstek $\Delta S_{\mathcal{A}^*\mathcal{B}^*}$ a celková entropie roste o hodnotu

$$\Delta S = \Delta S_{\mathcal{A}^*\mathcal{B}^*} - |\Delta S_{\mathcal{AB}}| \geq 0 \tag{5.54}$$

Rovnost nastává při ${\eta_{\max}}^* = \eta_{\max}$. Jinak ${\eta_{\max}}^* > \eta_{\max}$ což např. pro $T_0^* = T_0$ znamená, že $\Delta Q_W^* > \Delta Q_W$ a $T_W^* > T_W$.

Okolí poklesu entropie je 'vysáváno' ve větší (nebo stejné) míře - jeho nerozlišitelnost, neuspořádanost (chaos) roste rychleji (nebo stejně), než odpovídá tomuto poklesu, lokálnímu růstu uspořádanosti.

V dalším textu dokončíme naše úvahy o analogii transformace tepla a přenosu informace. Budeme se tedy zabývat přímými procesy a soustředíme se přitom na procesy vratné; nevratné procesy jsou totiž snadno vyjádřitelné ekvivalentními procesy vratnými.
Přesto se ale v kap. 9 k problému reverzního cyklu a jeho informačně - strukturálním aspektům vrátíme.

[29] Viz Dodatky 8.1.

6. Informační zdůvodnění Gibbsova paradoxu

Nechť je podle řešení Gibbsova paradoxu integrační konstanta S_0 entropií ΔS, kterou přidáváme k entropii σ, abychom získali, *dopočítali*, měřenou entropii S_{Claus} rovnovážného (koncového) stavu systému $\mathcal{A}$ $\mathcal{A}$ při teplotě Θ. Bez této korekce chybně zjišťujeme menší entropi σ,

$$\sigma = S_{\text{Claus}} - \Delta S, \quad \Delta S = S_0 \tag{6.1}$$

Pro hodnotu $\Delta S(n) \triangleq \Delta S$ na jednu částici systému platí $\dfrac{\Delta S(n)}{nN_A} = -k \ln \dfrac{n}{\gamma} = \dfrac{S_0}{N}$.
Entropii ΔS ale odpovídá jisté 'ztracené' teplo ΔQ_0 při teplotě Θ. Potom odvozujeme: indexproces!realizovaný

$$\begin{aligned} \Delta S &= \frac{\Delta Q_0}{\Theta} = -nR \ln \frac{n}{\gamma} = S_0 \\ \ln \gamma &= \frac{\Delta S}{knN_A} + \ln n = \frac{\Delta S}{kN} + \ln N - \ln N_A \end{aligned} \tag{6.2}$$

Při $\ln \gamma = \ln N$ platí $\dfrac{\Delta S}{kN} = \ln N_A$.
Naše pozorování můžeme chápat jako přenos informace informačním přenosovým kanálem $\mathcal{K}$, na jehož vstupech a výstupech jsou definovány *informační* entropie (termodynamické entropie připadající na jednu buňku (stavového) prostoru pozorovaného rovnovážného systému $\mathcal{A}$ v informačních jednotkách bit, nat, hartley),

$$\begin{aligned} &H(X) \textit{ vstupní}, \;\; H(X|Y) \textit{ ztrátová}, \\ &H(Y) \textit{ výstupní}, \;\; H(Y|X) \textit{ š, rušivá}. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Systém $\mathcal{A}$ je při našem pozorování v rovnovážném stavu s termodynamickou entropií $S^* = S_{\text{Claus}} = -kNB^* = -kN \ln N$. Na jednu jeho částici tak připadá připadá *vstupní* informační entropie našeho pozorování

$$H(X) \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{S^*}{kN} = \ln \gamma = -rB(r) = -B^* = \ln N, , \;\text{ kde } \; -B(r) \triangleq -B_{\text{Boltz}}, -B_{\text{Gibbs}} \tag{6.4}$$

Výstupní informační entropie našeho pozorování je tedy určena entropií σ,

$$H(Y) \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{\sigma}{kN} = -B(r) = -B_{\text{Gibbs}} = -B_{\text{Boltz}} \tag{6.5}$$

Naším pozorováním termodynamického systému s myšlenými diafragmami na něm definujeme námi 'viděný' informační zdroj s informační entropií $H(Y)$.

'Ztracené' teplo ΔQ_0 definuje *ztrátovou* informační entropii $H(X|Y)$ našeho (realizovaného) pozorovacího procesu, přenosu vázané informace,

$$H(X|Y) \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{S_0}{kN} \tag{6.6}$$

Pro tyto entropie platí rovnice (4.15) zachování (toku) entropií v kanále, a tedy pro *šumovou (rušivou)* informační entropii platí

$$H(Y|X) = 0 \tag{6.7}$$

Podle rovnic (4.15) pak platí

$$\begin{aligned} H(X|Y) &= H(X) - H(Y) = -rB(r) - (-B(r)) \\ &= -rB(r) + B(r) = -B(r) \cdot (r-1) \end{aligned} \tag{6.8}$$

Změna hodnoty entropie, kterou konstatuje Gibbsův paradox, *nepochází z pozorovaného systému,* ***je jen důsledkem našeho popisu systému*** *při jeho pozorování. Pokles hodnoty entropie vůči očekávané hodnotě S^* o ΔS konstatovaný Gibbsovým paradoxem je důsledkem pozorovatelem vytvořeného 'popisu' systému při jeho pozorování* [24, 26].

Systém je při našem pozorování v rovnovážném stavu s termodynamickou entropií $S^* = kN \ln N$. Na jednu buňku jeho (stavového) prostoru (při jeho nejjemnějším možném dělení na 'jednočásticové' buňky, v samotném systému jedině existujícím, a tedy uvažovaném) tak připadá informační entropie $H(X) = -B^*$.

Náš popis systému ale předpokládá jiné, hrubší dělení stavového prostoru systému, s menší informační entropií rozdělení pravděpodobnosti výběru (obsazení) našich buněk. Tímto naším popisem systému při jeho pozorování tedy odečítáme od vstupní informační entropie o velikosti $H(X) = \dfrac{S^*}{kN} = -B^* = \ln N$ změnu, ztrátovou informační entropii $H(X|Y) = \dfrac{\Delta S}{kN} > 0$, $\Delta S = S_0$. Pro výstupní, pozorovatelem zaznamenanou entropii σ (v termodynamických jednotkách clausius, boltzmann) platí $\sigma = (S^*) - \Delta S$.

Správně tak získáváme výstupní informační entropii na jednu buňku námi definovaného dělení prostoru, $H(Y) = H(X) - H(X|Y) = \dfrac{\sigma}{kN}$.

Přísně vzato Gibbsův paradox popisuje výsledek pozorování, pokud by se skutečně realizovalo. Pozorovatel systému tedy vidí (by viděl) to, co si sám nadefinoval, a to je (výstupní) informační zdroj o informační entropii $H(Y)$. Podle rovnic (6.4) lze pro (6.8) psát

$$H(X|Y) = (-B^*) \cdot \frac{r-1}{r}, \quad r \geq 1 \tag{6.9}$$

Maximální přesnosti, detailnosti 'popisu' systému dosahujeme při $r = 1$. Tehdy platí $B(1) = B^*$, a tedy $H(Y) = H(X) = B^*$, $H(X|Y) = 0$. Je zřejmé, že

$$\begin{aligned} r &= N - 1, \quad q = \frac{N-1}{r}, \quad r = \frac{N-1}{m-1} = 1 \text{ když } m = N \\ r &= \frac{-B^*}{-B} = \frac{Q}{-BkN\Theta} = \frac{\ln N}{-\sum_i \frac{N_i}{N} \ln \frac{N_i}{N}} = \frac{N-1}{q} \geq 1 \end{aligned} \tag{6.10}$$

kde q je určeno početm m buněk ('umístěním' našich přepážek), $q = m - 1$. Pro parametr q, přesnost popisu systému r a maximální počet N jednočásticových buněk pak platí

$$q = (N-1)\cdot\frac{B}{B^*},\ \text{ a tedy }\ qr = N-1,\ \ q = \frac{N-1}{r};\ \ r = \frac{N-1}{m-1} = 1,\ m = N \quad (6.11)$$

Minimální přesnosti 'popisu' systému naším myšleným informačním zdrojem dosahujeme při $r = \infty$, $q = 0$. Tehdy umisťujeme 0 přepážek ($m = 1$), o systému si 'nic nemyslíme', tedy definujeme na něm informační zdroj s informační entropií $-B_{\mathrm{Gibbs}} = 0$. Tehdy je ale výsledná (informační) entropie našeho 'pozorování' $H(Y) = 0$ a ztrátová entropie $H(X|Y) = \dfrac{S^*}{kN} = \ln N$. Podle (6.4) lze pro (6.9) psát

$$\begin{aligned} H(X|Y) &= \ln N\cdot\left(1-\frac{1}{r}\right) \qquad (6.12)\\ r &= \frac{\ln N}{\ln N - H(X|Y)} = \frac{-B^*}{-B^* - H(X|Y)},\quad r \geq 1 \end{aligned}$$

Naše pozorování systému, včetně *matematické korekce* na Gibbsův paradox, lze pak popsat *Shannonovým schematem přenosu informace* (4.15), v němž platí

$$H(X) = \frac{S_{\mathrm{Claus}}}{kN},\ H(X|Y) = \frac{S_0}{kN} \qquad H(Y) = \frac{S_{\mathrm{Claus}}}{kN},\ H(Y|X) = \frac{\Delta S}{kN} \quad \Rightarrow \ (6.13)$$
$$H(X) = H(Y)$$

Skutečný přenos informace popsaný poslední rovností je ale nerealizovatelný [22, 23].

Můžeme tedy říci, že takto informačně viděný ***Gibbsův paradox*** *je vlastně sporem (paradoxem) gnozeologického charakteru. Spočívá v tom, že při pozorování objektu, v našem případě termodynamického systému, můžeme obdržet jen jeho zkreslený obraz vyvolaný naší představou o pozorovaném objektu popsanou veličinou $H(Y)$. Jinými slovy paradox* ***spočívá v nerespektování****, opominutí* ***reálných vlastností****, třeba i jen myšleného* ***pozorování*** [24, 26].

Velikost tohoto zkreslení $\Delta S \neq 0$ je pak dána (ne)dokonalostí pozorování (detailností popisu objektu pro potřeby pozorování) $r \geq 1$, tedy *samotnou definicí* procesu pozorování, měření [23], názorem pozorovatele (detailností popisu r) o měřeném objektu (zde modelovaným ohřívákem $\mathcal{A}$) vyjádřeném organizací pozorovací metody (zde Carnotův cyklus $\mathcal{O}$ s teplotami $T_W > T_0$), ale následně také realizací této metody [23].[30]

Jak již bylo řečeno ***měření ovlivňuje měřené*** *[22] ale* ***podle představy pozorovtele o měřeném****, vyjadřené v definici měření, organizací pozorovací, měřící metody* [24, 26].

[30]Formálně vzato jedná se o vlastost informační entropie jako *funkcionálu* na množině rozdělení pravděpodobností (je maximální pro rovnoměrné rozdělení).

Informační entropie, rovnoměrnost rozdělení a Gibbsův paradox.

Platí, že $\ln n = -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \ln \frac{1}{n}$. Nechť dále $\sum_{i=1}^{m} \frac{n_i}{n} = 1$, $\sum_{i=1}^{m} n_i = n$, $m \leq n$. Potom

$$-\sum_{i=1}^{m} \frac{n_i}{n} \ln \frac{n_i}{n} \leq \ln n \quad \text{nebo jinak,} \quad \lim_{\frac{n_i}{n} \to \frac{1}{n}} \left[-\sum_{i=1}^{m} \frac{n_i}{n} \ln \frac{n_i}{n} \right] = \ln n$$

Důkaz:

$$\begin{aligned}
-\sum_{i=1}^{m} \frac{n_i}{n} \ln \frac{n_i}{n} &\leq -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \ln \frac{1}{n} = \ln n \\
-\ln n = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{n} \ln \frac{1}{n} + \sum_{i=m+1}^{n} \frac{1}{n} \ln \frac{1}{n} &\leq \sum_{i=1}^{m} \frac{n_i}{n} \ln \frac{n_i}{n} \\
\sum_{i=1}^{m} \left[\frac{1}{n} \ln \frac{1}{n} - \frac{n_i}{n} \ln \frac{n_i}{n} \right] &\leq -\sum_{i=m+1}^{n} \frac{1}{n} \ln \frac{1}{n} \\
\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{n} [\ln 1 - \ln n] - \frac{n_i}{n} [\ln n_i - \ln n] &\leq -\sum_{i=m+1}^{n} \frac{1}{n} \ln \frac{1}{n} \\
\sum_{i=1}^{m} \left[-\frac{1}{n} \ln n - \frac{n_i}{n} \ln n_i + \frac{n_i}{n} \ln n \right] &\leq -\sum_{i=m+1}^{n} \frac{1}{n} \ln \frac{1}{n} \\
\sum_{i=1}^{m} \left[\frac{n_i - 1}{n} \ln n - \frac{n_i}{n} \ln n_i \right] &\leq -\sum_{i=m+1}^{n} \frac{1}{n} \ln \frac{1}{n} \\
\sum_{i=1}^{m} [(n_i - 1) \ln n - n_i \ln n_i] &\leq -\sum_{i=m+1}^{n} \ln \frac{1}{n} = (n - m) \cdot \ln n \\
-m \cdot \ln n + \sum_{i=1}^{m} [n_i \ln n - n_i \ln n_i] &\leq -\sum_{i=m+1}^{n} \ln \frac{1}{n} = (n - m) \cdot \ln n \\
\sum_{i=1}^{m} [n_i \ln n - n_i \ln n_i] &\leq n \cdot \ln n \\
\ln n \cdot \sum_{i=1}^{m} n_i - \sum_{i=1}^{m} n_i \ln n_i &\leq n \cdot \ln n \\
-\sum_{i=1}^{m} n_i \ln n_i &\leq 0, \quad n_i \geq 1
\end{aligned}$$

Dokázali jsme tedy první část našeho tvrzení. Nyní dokážeme i druhou.
Lze psát

$$\begin{gathered}
\forall \varepsilon \to 0^+ \ \exists m* \ \forall m \geq m* \ \Rightarrow \\
\Rightarrow \ 0 \ \leq \ \ln n + \sum_{i=1}^{m} \frac{n_i}{n} \ln \frac{n_i}{n} \ \leq \ \varepsilon
\end{gathered}$$

Potom

$$0 \ \leq \ -\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{n} \ln \frac{1}{n} - \sum_{i=m+1}^{n} \frac{1}{n} \ln \frac{1}{n} + \sum_{i=1}^{m} \frac{n_i}{n} \ln \frac{n_i}{n} \ \leq \ \varepsilon$$

$$0 \leq -\sum_{i=1}^{m}\left[-\ln n - n_i\left(\ln n_i - \ln n\right)\right] + \sum_{i=m+1}^{n} \ln n \leq \varepsilon$$

Pro $1 \leq m* \leq m \leq n$ bude platit

$$0 \leq m \ln n + \sum_{i=1}^{m} n_i \ln n_i - m \ln n + (n-m) \ln n \leq \varepsilon,$$

$$0 \leq \sum_{i=1}^{m} n_i \ln n_i + (n-m) \ln n \leq \varepsilon$$

Pro $m = n$ platí

$$0 \leq m \ln n + \sum_{i=1}^{m} n_i \ln n_i - m \ln n + (n-m) \ln n \leq \varepsilon,$$

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n} n_i \ln n_i + 0 \leq \varepsilon$$

Tehdy $n_i = 1$ a tedy $\frac{n_i}{n} = \frac{1}{n}$, $i = 1, ..., n$. Platí tedy i druhá část našeho tvrzení.

Gibbsův paradox je tedy formálně vysvětlitelný právě jako důsledek toho, že entropie je *funkcionálem* na množině rozdělení pravděpodobnstí.

Protože lze psát, že $\frac{n_i}{n} = \frac{Q_i}{Q}$, je možno uvažovat, že

$$1 - \frac{n_i}{n} = 1 - \frac{Q_i}{Q} = 1 - \beta_i \longrightarrow 1 - \frac{1}{n}$$

Při jakémkoli pozorování zprávy s pravděpodobností $\frac{n_i}{n}$ je $\beta_i > 0$ a tedy se musí projevit Gibbsův paradox.

Entropie S_{Claus} ekvilibriálního termodynamického systému při konstantní teplotě (*termicky homogenního*) je entropie (ve fyzikálních jednotkách) uniformního rozdělení $\left[\frac{1}{n}\right]_{i=1}^{n}$ na n buňkách stavového prostoru; je rovněž *aditivní*, $S_{\text{Claus}} = \sum_{i=1}^{m} S_{\text{Claus},i}$.

Obecně je ale (informační) entropie (systému Ξ náhodných veličin X_i, $i = 1, ..., m$) *subaditivní*, $H(\Xi) \leq \sum_{i=1}^{m} H(X_i)$, $\Xi = (X_i)_{i=1}^{m}$. Rovnost $H(\Xi) = \sum_{i=1}^{m} H(X_i)$ platí pro *nezávislý* systém Ξ.

Gibbsův paradox je formálně vysvětlitelný i touto vlatností (informační) entropie.

6.1 Fyzikální a informační vlastnosti pozorování

Teplo ΔQ_0 zavedené v odd. 5.1, 5.2 a kap. 6 *definuje* ztrátovou entropii našeho pozorování. Nazvěme ho 'ztracené', resp. *ztrátové* teplo. Vyjadřuje energii potřebnou na *realizaci* pozorovací metody, hrazenou ale z pozorovaného rovnovážného systému $\mathcal{A}$.[31] Ten obsahuje (měřené, pozorované) teplo Q_W při teplotě T_W. Pak je ale přirozené uvažovat jeho odvod (z pozorovaného, měřeného systému $\mathcal{A}$) do rezervoáru $\mathcal{B}$ o teplotě $T_0 < T_W$. Pak ovšem $Q_W - \Delta Q_0$, kde $Q_W \triangleq \Delta Q_W$ je energie nesoucí zjištěnou (průměrnou) informaci (ve fyzikálních, termodynamických jednotkách clausius, boltzmann),

$$\sigma = S^* - S_0 \tag{6.14}$$

kterou 'získáváváme' naším pozorováním termodynamického systému $\mathcal{A}$. Podle rovice (4.15) je tedy námi získaná (průměrná) informace

$$H(Y) = H(X) - H(X|Y) = T(X;Y) = \frac{Q_W - \Delta Q_0}{kNT_W} = \frac{Q_W}{kNT_W} \cdot \frac{Q_W - \Delta Q_0}{Q} \tag{6.15}$$

Zaveďme označení $\beta \triangleq \frac{T_0}{T_W}$ a $\eta_{\max} \triangleq \frac{Q_W - \Delta Q_0}{Q_W} \in< 0, 1)$. Potom píšeme

$$\begin{aligned} \frac{\Delta Q_0}{T_0} &= -\frac{Q_W - \Delta Q_0}{T_0} + \frac{Q_W}{T_0} = -\frac{Q_W - \Delta Q_0}{T_0} \cdot \frac{Q_W}{Q_W} + \frac{Q_W}{T_0} \cdot \frac{T_W}{T_W} = \\ &= -\frac{Q_W - \Delta Q_0}{Q} \cdot \frac{Q_W}{T_0} + \frac{Q_W}{T_W} \cdot \frac{1}{\beta} = -\eta_{\max} \cdot \frac{Q_W}{T_W} \cdot \frac{1}{\beta} + \frac{Q_W}{T_W} \cdot \frac{1}{\beta} \\ &= \frac{Q_W}{T_W} \cdot \frac{1}{\beta} \cdot (1 - \eta_{\max}) = \frac{Q_W}{T_W} \cdot \frac{1}{\beta}\beta = \frac{Q_W}{T_W} \end{aligned} \tag{6.16}$$

Naše pozorovací metoda popsaná přenosem informace $\mathcal{T}$ v kanále $\mathcal{K}$ tedy stanovuje stejný vztah mezi dvěma teply Q_W a ΔQ_0 s teplotami T_W a T_0, jako *vratný* Carnotův cyklus $\mathcal{O}$ *přímý*, s pracovními teplotami T_0 *chladníku* $\mathcal{B}$, T_W *ohříváku* $\mathcal{A}$, s *transformátorem* $\mathcal{L}$ a dodávající mechanickou energii ΔA. Vztah (6.16) tedy představuje integrální formulaci II. hlavní věty termodynamické pro vratné děje (při spojitě se měnící teplotě $\vartheta > 0$),

$$\oint_{\mathcal{O}} \mathrm{d}S \triangleq \oint_{\mathcal{O}} \frac{\delta Q_W}{\vartheta} = 0 \tag{6.17}$$

Cyklus $\mathcal{O}$ lze tedy považovat za vlastní pozorovací metodu, její termodynamickou *realizaci*, *model* našeho pozorování, resp. *termodynamický model* přenosu $\mathcal{T}$ v kanálu $\mathcal{K} \cong \mathcal{L}$, $\mathcal{O} \cong \mathcal{T}$ [23]. V kanálu $\mathcal{K}$ platí vztah (4.15), v obecnějším zápisu

$$\oint_{\mathcal{T}} \mathrm{d}H = 0 \tag{6.18}$$

[31] Pokud pozorovaný systém v rovnovážném stavu není, *pozorovatel jej vidí* ve stavu s entropií

$$-B \in \{-B_{\mathrm{Boltz}}\} - \{-B_{\mathrm{Gibbs}}\} \bigcap \{-B_{\mathrm{Boltz}}\} \quad \text{platí}$$

$$0 \leq \Delta\mathcal{I} = \frac{Q_W}{kNr'\Theta} \cdot (1 - \beta) < \Delta H_{\mathcal{C}}, \quad r' > r \geq 1$$

V cyklu $\mathcal{O}$ modelujícím naše pozorování $\mathcal{T}$ veličiny X přes kanál $\mathcal{K}$ [23], kdy vidíme Y platí:

$$H(X) = \frac{Q_W}{kNT_W} = \frac{\Delta Q_0}{kNT_0} \quad , \quad H(Y) = \frac{\Delta A}{kNT_W} = H(X) \cdot \eta_{\max} \tag{6.19}$$
$$H(Y|X) = 0 \quad \text{a} \quad H(X|Y) = \frac{Q_W}{kNT_W} \cdot \beta = \frac{\Delta Q_0}{kNT_W}$$

a podle (6.18), resp. (4.15)

$$T(X;Y) = T(Y;X) \;=\; H(X) \cdot \eta_{\max} = \Delta \mathcal{I} < H(X)$$

Pro informační přírůstky (realizacemi našeho pozorování) a přírůstky termodynamicky definovaných entropií systémů $\mathcal{L}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ a celkové izolované soustavy $\mathcal{C}$, v níž naše pozorování probíhá, platí [23]

$$\begin{aligned}
\Delta S_{\mathcal{L}} &= \oint_{\mathcal{O}} \frac{\delta Q_W}{k\vartheta} = \frac{Q_W}{kT_W} - \frac{\Delta Q_0}{kT_0} = kN \cdot \oint_{\mathcal{T}} \mathrm{d}H = kN \cdot [H(X) - H(X)] \qquad (6.20)\\
\Delta S_{\mathcal{AB}} &= -\frac{\Delta Q_0}{kT_W} + \frac{\Delta Q_0}{kT_0} = \frac{\Delta Q_0}{kT_0} \cdot \eta_{\max} = \frac{Q_W}{kT_W} \cdot \eta_{\max} = kN \cdot \Delta \mathcal{I} \geq 0\\
\Delta S_{\mathcal{C}} &= \Delta S_{\mathcal{L}} + \Delta S_{\mathcal{AB}} = \frac{Q_W}{kT_W} \cdot \eta_{\max} = kN \cdot \Delta \mathcal{I} \geq 0
\end{aligned}$$

Pro naše pozorování tedy platí *rozšířená* II. hlavní věta termodynamická pro vratné děje [8, 23],

$$\Delta(S_{\mathcal{C}} - kN \cdot \mathcal{I}) = 0, \;\text{ resp. }\; \Delta(H_{\mathcal{C}} - \mathcal{I}) = 0, \;\; \Delta H_{\mathcal{C}} \triangleq \frac{\Delta S_{\mathcal{C}}}{kN} = \Delta \mathcal{I} \geq 0 \tag{6.21}$$

V izolované soustavě $\mathcal{C}$, v níž probíhá naše (realizované) pozorování systému $\mathcal{A}$ s teplem Q_W, v ekvilibriu při teplotě T_W (touto realizací je transformace Q_W na ΔA v cyklu $\mathcal{O} \cong \mathcal{T}$ [23]) dochází k růstu termodynamické entropie $S_{\mathcal{C}}$ o hodnotu $\Delta S_{\mathcal{C}} = kN \cdot \Delta \mathcal{I} \geq 0$.

Ke stejným vztahům mezi termodynamickými veličinami bychom došli i při použití reverzní definice termodynamického modelu přenosu zprávy (odd. 5.3), např ΔQ_0 ze systému $\mathcal{B}$ při T_0.
Jedná se o *důsledek* (realizace) pozorování, měření. Především je to ale *vlastnost* na energii (tepelnou) *vázané* informace [8, 44].
V našem případě termodynamicky modelovaného, realizovaného 'vratného' pozorování, $H(Y|X) = 0$, rovnovážného systému $\mathcal{A}$, s detailností popisu $r \geq 1$, podle (7.1), (3.84) a (6.4) až (6.9), tedy na množině hodnot $B(r) \in \{B_{\text{Gibbs}}\} \bigcap \{B_{\text{Boltz}}\}$, platí

$$\begin{aligned}
\Delta H_{\mathcal{C}} &= -r{\cdot}B(r) - [-B(r) \cdot (r-1)] \qquad (6.22)\\
-r{\cdot}B(r) + B(r) \cdot r - B(r) &= -B_{\text{Gibbs}} = \Delta \mathcal{I},\\
\Delta H_{\mathcal{C}} &= \frac{-B^*}{r} = \frac{-S^*}{kNr} = \frac{Q_W}{kNrT_W} \quad , \quad \Delta S_{\mathcal{C}} = \frac{Q_W}{rT_W} \geq 0, \quad r \geq 1
\end{aligned}$$

Podle (6.19) a (6.22) tedy pro účinnost realizované (definice) metody pozorování platí, že

$$\eta_{\max} = \frac{1}{r}, \quad \beta = \frac{\Delta Q_0}{Q_W} = \frac{r-1}{r}, \quad r > 1 \tag{6.23}$$

Entropie $S_{\mathcal{C}}$ celkové soustavy $\mathcal{C}$ tedy nevzroste pouze pro $r = \infty$, $\eta_{\max} = 0$. Tehdy nic nepozorujeme, neměříme, nedochází k žádné transformaci energie, nevíme o něm. Při $r = 1$ je celá izolovaná soustava, v níž pozorování probíhá, včetně pozorovatele, v rovnovážném stavu při teplotě T_W a podle (6.23) platí $r = 1$, $\eta_{\max} = 1$. Takové pozorování je nerealizovatelné.

Už jen ***existence pozorování*** v *našem reálném světě* **je doprovázena vzrůstem** jeho **termodynamické entropie**, a tedy k platnosti zákona *termodynamické šipky času*

$$\frac{\mathrm{d}S_{\mathcal{C}}}{\mathrm{d}t} > 0$$

kde t je čas.

Nevratné pozorování.
Ke stejnému růstu entropie $S_{\mathcal{C}}$ by ale došlo i v nevratném případě. Musili bychom uvažovat teplo $\Delta Q_{W0x} > 0$ vznikající nevratností (realizace) pozorování, měření. To by jen zmenšilo přírustek výstupní informace $H(Y)$ z hodnoty $\Delta\mathcal{I}$ na hodnotu $\Delta\mathcal{I} - \dfrac{\Delta Q_{0x}}{kNT_W}$ [23].

Nechť je tedy podle Gibbsova paradoxu $\Delta S > 0$ entropií přidanou k entropii σ zjištěné při pozorování rovnovážného systému $\mathcal{A}$ při teplotě Θ. Zjišťujeme menší entropii $S < S_{\mathrm{Claus}}$

$$S = S_{\mathrm{Claus}} - \Delta S$$

Má ale platit

$$S_{\mathrm{Claus}} = \sigma + S_0$$

tj. integrováním bez přidané entropie $S_0 > 0$ zjišťujeme menší entropii σ. Jiné entropie než S, S_{Claus}, S_0, ΔS a σ ale v našem pozorování nevystupují a je tedy přirozené uvažovat

$$\sigma = S_{\mathrm{Claus}} - \Delta S$$

Potom zřejmě

$$S_{\mathrm{Claus}} = (S_{\mathrm{Claus}} - \Delta S) + S_0$$

a tedy

$$\Delta S = S_0$$

Pro hodnotu $\Delta S(n)$ na jednu částici systému platí

$$\frac{\Delta S(n)}{nN_A} = -k \ln\frac{n}{\gamma} = \frac{S_0}{N}$$

Entropii $\Delta S > 0$ odpovídá určité teplo Q_0 při teplotě (pozorování) Θ. Potom odvozujeme:

$$\Delta S = \frac{Q_0}{\Theta} = -nR\ln\frac{n}{\gamma} = S_0$$

$$\frac{Q_0}{\Theta} = -nR\ln n + nR\ln\gamma \quad [= S_0(n)]$$

$$\frac{\frac{Q_0}{\Theta}+nR\ln n}{nR}=\ln\gamma>0,\quad \gamma>1$$

$$\ln\gamma=\frac{Q_0+\Theta{\cdot}nR\ln n}{\Theta{\cdot}nR}=\frac{Q_0+\Theta{\cdot}knN_A\ln n}{\Theta{\cdot}knN_A}=\frac{Q_0+\Theta{\cdot}kN\ln\frac{N}{N_A}}{\Theta{\cdot}kN}$$

pokud $n=1$ tj. $N=N_A$

$$\ln\gamma=\frac{Q_0}{\Theta{\cdot}kN_A},\quad k\cdot\ln\gamma=\frac{Q_0}{\Theta{\cdot}N_A}$$

$$\Delta S=\frac{Q_0}{\Theta},\quad k\cdot\ln\gamma=\frac{\Delta S}{N_A},\quad \ln\gamma=\frac{\Delta S}{kN_A}$$

jinak $n\neq 1$ tj. $N\neq N_A$

$$\ln\gamma=\frac{\Delta S}{knN_A}+\ln n=\frac{\Delta S}{kN}+\ln N-\ln N_A,\quad \text{při}\quad \ln\gamma=\ln N \quad (3.101)$$

$$\frac{\Delta S}{kN}=\ln N_A$$

Je přirozené uvažovat, že teplo Q_0 je energií 'zaplacenou' pozorovaným systémem . Naše pozorování systému, bez korekce na Gibbsův paradox, lze pak popsat Shannononvým schematem přenosu informace (kap. 3)

$$H(X)-H(X|Y)=H(Y)-H(Y|X)$$

kde

$$H(X)=S_{\text{Claus}},\quad H(X|Y)=S_0,\quad H(Y)=S_{\text{Claus}},\quad H(Y|X)=0$$

(v termodynamických jednotkách).

Měřená termodynamická entropie S^*, při pozorování systému $\mathcal{A}$ v rovnovážném stavu, je součtem entropie σ a ztrátové informační entropie S_0, dodané (v termodynamických jednotkách)(při integrování). Platí

$$kN\ln\gamma=\frac{Q}{\Theta}=\sigma+S_0=kN\cdot H(Y)+kN\cdot H(X|Y)=kN\cdot H(X)$$

$$S^*=\sigma+S_0$$

$$-B^*=\frac{\sigma}{kN}+\frac{S_0}{kN}=-rB$$

$$\frac{\sigma}{kN}\triangleq H(Y),\quad \frac{S_0}{kN}\triangleq H(X|Y),\quad \ln\gamma\triangleq H(X)=-rB=-B^*=\ln N$$

$$H(X)=H(Y)+H(X|Y),\quad H(Y|X)\stackrel{\text{Def}}{=}0$$

$$-B=\frac{\sigma}{rkN}+\frac{S_0}{rkN}=\frac{H(Y)}{r}+\frac{H(X|Y)}{r}\quad\left[=\frac{\Delta\sigma}{kN}\right]$$

$$S_0=-nR\ln\frac{n}{\gamma}=-kN\ln\frac{\frac{N}{N_A}}{\gamma}=-kN\ln\frac{\frac{N}{N_A}}{N}=kN\ln N_A,\quad \Delta S=kN\ln N_A=S_0$$

$$-B^*=\frac{\sigma}{rkN}+\frac{\ln N_A}{r}$$

Potom

$$\sigma=-BrkN-kN\ln N_A=-B^*kN-kN\ln N_A=kN\ln N-kN\ln N_A=kN\ln\frac{N}{N_A}$$

Také ale platí

$$\sigma = nc_v \ln \Theta + nR \ln V = \frac{N}{N_A} c_v \ln \Theta + kN \ln V = \ln \Theta^{\frac{N}{N_A} c_v} + \ln V^{kN}$$

$$= \ln \left[\Theta^{\frac{c_v}{N_A}} V^k \right]^N = \ln \left[\Theta^{\frac{c_v k}{R}} V^k \right]^N = \ln \left[\Theta^{\frac{c_v}{R}} V \right]^{kN}$$

$$\sigma = kN \ln \left[\Theta^{\frac{c_v}{R}} V \right]$$

Srovnáním obou přístupů

$$\sigma = kN \ln \frac{N}{N_A} = kN \ln \left[\Theta^{\frac{c_v}{R}} V \right]$$

získáváme

$$\ln \frac{N}{N_A} = \ln \left[\Theta^{\frac{c_v}{R}} V \right], \quad \frac{N}{N_A} = \Theta^{\frac{c_v}{R}} V$$

Skutečně

$$-B = \frac{\ln \left[\Theta^{\frac{c_v}{R}} V \right]}{r} + \frac{\ln N_A}{r} = \frac{1}{r} \ln \left[\Theta^{\frac{c_v}{R}} V N_A \right]$$

$$-rB = -B^* = \ln \left[\Theta^{\frac{c_v}{R}} V N_A \right], \quad -B^* = \ln N$$

7. Ekvivalence hlavních termodynamických vět

7.1 Důkaz II. hlavní věty termodynamické

Uvažujeme systém náhodných veličin, přenosový kanál $\mathcal{K} \cong (X, Y)$ s entropiemi $H(X)$, $H(Y)$, $H(X|Y)$, $H(Y|X)$ definovanými vztahy (4.5) až (4.10). V tomto systénu platí kanálová rovnice (4.15), resp. (6.18). Ve fyzikální realizaci kanálu $\mathcal{K}$ pak veličiny X a Y mají fyzikální význam a nesou *vázanou, fyzikálně realizovanou* informaci a informační entropii [8, 44, 18].
V našem případě je vstupní zpráva $x \in X$ kódovaná (představovaná) tepelnou energií Q s teplotou Θ a $y \in Y$ je mechanická energie ΔA získávaná v cyklu $\mathcal{O} \cong \mathcal{T}$ právě při Θ.
Vázané entropie $k \cdot H(\cdot)$ a $k \cdot H(\cdot|\cdot)$ jsou Clausiovy entropie přepočítané na jednu z N částic pozorovaného systému, ohříváku $\mathcal{A}$ cyklu $\mathcal{O} \cong \mathcal{T}$, viz rovnnici (6.19).

Pro entropii $H_\mathcal{C}$ resp. termodynamickou entropii $S_\mathcal{C}$ celé izolované soustavy $\mathcal{C}$ pak platí zákon *růstu* resp. *neklesání* v izolované soustavě, vyjádřený již vztahem (6.21),

$$\Delta \mathcal{S}_\mathcal{C} \;=\; kN \cdot \Delta H_\mathcal{C} = kN \cdot [H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X)] \;\geq 0 \qquad (7.1)$$

Důkazem II. hlavní věty termodynamické je tedy posloupnost definic a odvození (3.1) až (4.15) a interpretací (6.18) až (7.1) tak, že veličiny X a Y nesou *vázanou informaci* tak, že to jsou energie na vstupu a výstupu *cyklicky* používaného transformátoru $\mathcal{L}$ v Carnotově, obecněji libovolném (vratném) tepelném cyklu [18, 23, 38].[32] [33]

Nejobecnější formulací II. hlavní věty termodynamické pro vratné cyklické procesy přenosu zpráv je tedy rovnost (6.18) resp. (4.15), dokázaná v teorii informace [9, 64] a uvažovaná pro (na teplo) vázanou informaci,

$$\begin{array}{rcl} kN \cdot \oint_\mathcal{T} \mathrm{d}H = 0, & \text{resp.} & \oint_\mathcal{O} \mathrm{d}S^{[\cdot]} = -kN \cdot \oint_\mathcal{T} \mathrm{d}B^{[\cdot]} = 0 \quad (7.2) \\ & \Rightarrow & \\ 0 \leq S(X) \cdot \eta_{\max} \stackrel{\triangle}{=} kN \cdot H(X) \cdot \eta_{\max} & = & kN \cdot \Delta H_\mathcal{C} = \Delta S_\mathcal{C} < S(X) \end{array}$$

Účinnost $\eta_{\max}$ je koeficient růstu entropie pro *přirozený* [31] proces přechodu tepla mezi teplejším a chladnějším prostředím. Je to i účinnost vratné cyclické transformace tepla ($\mathcal{O}$) využívající takového přechodu. Účinnost $\eta_{\max}$ definuje i pravděpdobnost chyby β ze vztahu (4.1), $\beta = 1 - \eta_{\max}$ resp. $\beta = \dfrac{H(X|Y)}{H(X)}$ 'carnotovské' realizace přenosu informace $\mathcal{T} \cong \mathcal{O}$ v kanálu $\mathcal{K} \cong \mathcal{L}$.

Samotná definice $\eta_{\max} \stackrel{\mathrm{Def}}{=} \dfrac{Q_W - \Delta Q_0}{Q} \in \, < 0, 1)$ je ale i formulací *I. hlavní věty termodynamické*. Podle vztahů (7.1) a (7.2) pro přírůstek celkové termodynamické

[32] Pozorovací metoda tedy 'sama v sobě' obsahuje opakovatelnost, cykličnost [23].
[33] Resp. uvažujeme náhradní vratným cyklus v případě nevratném.

entropie $S_{\mathcal{C}}$ (ekvivalentního rovnovážného systému), $\Delta S_{\mathcal{C}} = kN \cdot [H(X) - H(X|Y)]$, také platí

$$\eta_{\max} = \frac{\Delta S_{\mathcal{C}}}{S(X)} = \frac{\Delta H_{\mathcal{C}}}{H(X)} = \frac{\Delta Q}{Q_W} \left[= \frac{Q - \Delta Q_0}{Q} \right] \in < 0, 1), \tag{7.3}$$
$$Q,\ S(X),\ H(X) > 0 \ \Rightarrow\ \Delta S_{\mathcal{C}},\ \Delta H_{\mathcal{C}} \geq 0$$

Vztah (7.3) také je ekvivalentní definicí $\eta_{\max}$, která je ale také formulací II. hlavní věty termodynamické, a tak je vztahem (7.3) formulován i ***princip ekvivalence I. a II. hlavní věty termodynamické***, který říká:
II. hlavní věta termodynamická je tak dokázána platností I. hlavní věty termodynamické a naopak.

Ze vztahu (7.3) je odvotitelná i III. hlavní věta termodynamická, a to z toho, že interval hodnot $\eta_{\max}$ musí být v důsledku platnosti I. a II. hlavní věty termodynamické otevřený na pravé straně a z toho plyne, že $T_0 > 0°$K.

Formulujme nyní teorém vyjadřující ekvivalenční princip I., II. a III. hlavní věty termodynamické. Jeho důkaz je dán celým předcházejícím textem.

7.2 Ekvivalence I., II. a III. hlavní věty termodynamické

Teorém. ***(Ekvivalenční princip thermodynamiky)***
Nechť (X, Y) je systém náhodných veličin s informačními entropiemi $H(X)$, $H(Y)$, $H(X|Y)$, $H(Y|X)$ a s relevantními termodynamickými entropiemi [(náhradních) rovnovážných stavů], $S([\cdot]) = (Q_{[\cdot]})\Theta^{-1} = kN \cdot H([\cdot])$, $\Theta > 0$. Nechť dále

$$\begin{aligned} \Delta Q_0 &= Q \cdot \frac{T_0}{\Theta} = kN {\cdot} H(X) \cdot T_0, \quad \Theta \geq T_0 > 0 \\ S^* &\triangleq kN {\cdot} H(X), \quad \Delta S_0 = (S^*) \cdot \frac{T_0}{\Theta} \end{aligned}$$

kde Θ^{-1} je Pfaffův integrační faktor[34] [13, 40] pro $Q_{[\cdot]}$, N je počet částic (termodynamického rovnovážného) systému $\mathcal{A}$, vázajícího X, $\mathcal{A} \cong \mathcal{X}$, $X = [\mathcal{X},\ p(\cdot)]$. Při tomto přiřazení a označení platí kanálová rovnice $H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X)$, kde $H(Y|X) = 0$ a dále platí

$$\begin{aligned} \frac{Q - \Delta Q_0}{Q} &= \eta_{\max} \ \in < 0, 1) && \text{[I. hl.v.t.]} \quad (7.4) \\ \Leftrightarrow \frac{S^* - \Delta S_0}{S^*} &= \eta_{\max} = \frac{H(X) - H(X|Y)}{H(X)} && \\ \equiv \ \{(S^*) - \Delta S_0 &= \Delta S_{\mathcal{C}} = kN{\cdot}[H(X) - H(X|Y)] \ \geq 0\} && \text{[II. hl.v.t.]} \\ \Leftrightarrow \frac{\Theta - T_0}{\Theta} &= \eta_{\max} \ \Rightarrow\ \Theta \geq T_0 > 0 && \text{[III. hl.v.t.]} \end{aligned}$$

[34]Viz Dodatky 8.6.

Vztahy (7.4) platí v každém izolovaném systému, v němž probíhá cyklická transformace $\mathcal{O}$.

Ukázali jsme tedy, že: ***II. věta termodynamická je logicky odvoditelná**, dokazatelná , a to pomocí informačních vlastností (vázaného) stochastického systému, zde systém náhodných veličin* (X, Y). ***Další dvě termodynamické hlavní věty jsou odvoditelné z této** a naopak. **Všechny tři hlavní termodynamické věty jsou ekvivalentní**.*

Důkazem II. hlavní věty termodynamické je tedy zavedení informačních entropií na systému náhodných veličin, ale chápaných vázaně - fyzikálně realizovaných jako teplotně redukované tepelné energie, termodynamické entropie stacionárních náhradních ekvivalentních stavů a stanovení jejich matematických vlastností a vztahů (chápaných vázaně). K tomu jsme použili informační analýzu Gibbsova paradoxu a zdůvodnili jsme jej jako vlastnost (realizovaného) pozorování. Vázané informační entropie našeho (realizovaného) pozorování, vstupní, výstupní a podmíněné, jsou stejně jako ty volné svázany kanálovou rovnicí, ale nyní vázaně chápanou jako informační popis cyklické transformace tepelné energie pozorovaného systému.

***Kanálová rovnice** (4.15) **je v tomto smyslu 'vlastní' a nejobecnější formulací II. hlavní věty termodynamické.** Ve fyzikální interpretaci z ní plynou její původní, pouze konstatované formulace, včetně námi nově formulovaného Ekvivalenčního principu termodynamiky*, tedy principu ekvivalence I., II. a III. hlavní věty termodynamické.

8. Dodatky

8.1 Degradace energie, růst extenzity, změny přirozené a změny nepřirozené

Termodynamika v širším slova smyslu je fyzikální disciplína zabývající se zákonitostmi transformací energií a látek a jejich důsledky [55].

Transformace energií rozdělujeme na

a) ***přirozené (pozitivní, samovolné)*** *transformace*
- přeměna potenciální energie v kinetickou, kinetické energie v tepelnou; přirozeným procesem je také přechod tepla z tělesa teplejšího na chladnější, expanze plynu do vakua atp. (přirozená změna stavu); tyto transformace, změny probíhají nevratně. Probíhají uvnitř izolovaného systému 'samovolně', *bez kompenzace.*

b) ***nepřirozené (negativní)*** transformace
- přechod tepla z tělesa cladnějšího na teplejší, přeměna tepla v mechanickou práci, kladná změna potenciální energie atp. *Nemohou probíhat bez kompenzace nějakým přirozeným dějem* [31].

Směr možných transformací a změn byl nejprve formulován jako *princip degradace energie.*

8.1.1 Degradace energie

W. Thomson (lord Kelvin) si povšiml, že některé druhy energie jsou snáze přeměnitelné v jiné druhy a naopak [44]. Tehdy známé formy energií rozdělil do třech kategorií podle *kvality*:

a) ***vysoká*** *kvalita* - energie *mechanická*, energie *elektrická*,
b) ***střední*** *kvalita* - energie *chemická*,
c) ***nízká*** *kvalita* - energie *tepelná.*

Dále zaznamenal, že každá z těchto energií projevuje *tendenci* svou *kvalitu*, to jest schopnost být přeměněna v energii jiného typu, *snižovat.* Navíc po všech možných přeměnách v izolované části prostoru všechny tyto energie končí jako energie tepelná, a to ještě v rámci uvažované izolované části prostoru maximálně rovnoměrně rozprostřená.
Tuto skutečnost nazval *principem degradace energie.*

Bylo zjištěno, že pokud budou energie jednotlivých druhů transformovány *vratně*, tj. bez *disipace* (bez jejich 'rozptylování' a také bez vzniku tepla), bude poměr $\Delta\mathcal{S}_i = \dfrac{\Delta\mathcal{Q}_i}{\vartheta_i}$ pro jednotlivé energie $\mathcal{Q}_i$ stálý (v rámci jednoho transformačního cyklu).
Symbol ϑ_i označuje *intenzitu* energie $\mathcal{Q}_i$, symbol $\mathcal{S}_i$ její *extenzitu.* Pokud tyto transformace probíhají nevratně je $\Delta\mathcal{S}_i > 0$.
Intenzita ϑ tepelné energie Q je *termodynamická teplota* Θ, extenzitou je tepelná,

Clausiova entropie S_{Claus}.
Při nevratných transformacích všech druhů energií při teplotě Θ je produkováno disipační teplo ΔQ_{0x} a tepelná entropie uvažované části prostoru roste o $\dfrac{\Delta Q_{0x}}{\Theta} > 0$. Jedná se o teplo vzniklé třením, ztrátami na elektrických odporech atp. Lze tedy čistě empiricky formulovat princip degradace energie kvantitativně jako *II. hlavní větu termodynamickou* (v poněkud širší podobě): *Při všech transformacích energií v izolované části prostoru (jeho) tepelná entropie roste, nebo je konstantní,* $\mathrm{d}S_{\mathrm{Claus}} \geq 0$*; znaménko rovnosti přísluší změnám vratným.*

Lépe je ale tvrdit, že: *Součet změn extenzit všech energií transformovaných v izolované části prostoru je nezáporný.*

8.1.2 Zákon růstu extenzity

K vytvoření vázané informace, tj. obecně k fyzikální realizaci matematicky definovaného zdroje zpráv, je možno užít různých druhů energie, ne jenom energie tepelné. U každého druhu energie $\mathcal{Q}_{[\cdot]}$ zavádíme *intenzitu* $\vartheta_{[\cdot]}$ s pracovními hodnotami $\Theta_{[\cdot]}$, $T_{[\cdot]0}$ a *extenzitu* $\mathcal{S}_{[\cdot]}$ [18]. Uvažujme, že $\Theta_{[\cdot]} \geq T_{[\cdot]0}$. Zabývejme se nyní např. energií *elektrickou*, a to *proudovou* a *napěťovou* a také *tepelnou*, v uvedeném pořadí.

$$\mathcal{Q}_U = \frac{1}{\rho} \cdot {\vartheta_U}^2 \tag{8.1}$$

kde ϑ_U je *elektrický potenciál*

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{Q}_U &= \frac{2}{\rho} \cdot \vartheta_U \,\mathrm{d}\vartheta_U = \vartheta_U \,\mathrm{d}\mathcal{S}_U \\
\mathrm{d}\mathcal{S}_U = \frac{\delta\mathcal{Q}_U}{\vartheta_U} &= \frac{2}{\rho} \cdot \,\mathrm{d}\vartheta_U, \quad \mathcal{S}_U = \frac{2}{\rho}\vartheta_U \\
\mathcal{Q}_I &= \rho \cdot {\vartheta_I}^2, \quad \delta\mathcal{Q}_I = 2\rho \cdot \vartheta_I
\end{aligned}$$

kde ϑ_I is *elektrický proud* $\quad \mathrm{d}\vartheta_I = \vartheta_I \,\mathrm{d}\mathcal{S}_I$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\mathcal{S}_I = \frac{\delta\mathcal{Q}_I}{\vartheta_I} &= 2\rho \cdot \,\mathrm{d}\vartheta_I, \quad \mathcal{S}_I = 2\rho\vartheta_I \\
\mathcal{Q}_{Ht} &\triangleq Q = \lambda \cdot {\vartheta_{Ht}}^2
\end{aligned}$$

kde ϑ_{Ht} je *teplota* Θ

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{Q}_{Ht} &= 2\lambda \cdot \vartheta_{Ht} \,\mathrm{d}\vartheta_{Ht} = \vartheta_{Ht} \,\mathrm{d}\mathcal{S}_{Ht} \\
\mathrm{d}\mathcal{S}_{Ht} = \frac{\delta\mathcal{Q}_{Ht}}{\vartheta_{Ht}} &= 2\lambda \cdot \,\mathrm{d}\vartheta_{Ht} \triangleq \,\mathrm{d}S \\
\mathcal{S}_{Ht} &= 2\lambda\vartheta_{Ht} \triangleq S, \quad \lambda = \frac{\pi^2 k^2}{6\hbar}
\end{aligned}$$

Lze tedy souhrnně psát

$$\delta\mathcal{Q}_{[\cdot]} = \mathcal{S}_{[\cdot]} \,\mathrm{d}\vartheta_{[\cdot]} = \vartheta_{[\cdot]} \,\mathrm{d}\mathcal{S}_{[\cdot]}, \tag{8.2}$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Q}_{[\cdot]} &= \int_{\mathcal{S}_{[\cdot]0}}^{\mathcal{S}_{[\cdot]1}} \vartheta_{[\cdot]}\ \mathrm{d}\mathcal{S}_{[\cdot]} = \overline{\vartheta_{[\cdot]}}(\mathcal{S}_{[\cdot]1} - \mathcal{S}_{[\cdot]0}) = \overline{\vartheta_{[\cdot]}}\Delta\mathcal{S}_{[\cdot]} \\
-\Delta\mathcal{Q}_{[\cdot]0} &= \int_{\mathcal{S}_{[\cdot]1}}^{\mathcal{S}_{[\cdot]0}} \vartheta_{[\cdot]}\ \mathrm{d}\mathcal{S}_{[\cdot]} = \overline{\vartheta_{[\cdot]0}}(\mathcal{S}_{[\cdot]0} - \mathcal{S}_{[\cdot]1}) = -\overline{\vartheta_{[\cdot]0}}\Delta\mathcal{S}_{[\cdot]}
\end{aligned}
$$

Pro energii $\Delta A_{[\cdot]}{=}\oint_{\mathcal{T}_{[\cdot]}} \mathrm{d}\mathcal{S}_{[\cdot]} = \mathcal{Q}_{[\cdot]} - \Delta\mathcal{Q}_{[\cdot]0}$ transformovanou ze vstupní energie $\mathcal{Q}_{[\cdot]}$ vratným cyklickým procesem $\mathcal{T}_{[\cdot]}$ s pracovními intenzitami $\Theta_{[\cdot]}$ a $T_{[\cdot]0}$ v transformátoru $\mathcal{L}_{[\cdot]}$, $\Theta_{[\cdot]} \geq T_{[\cdot]0}$, platí

$$
\eta_{[\cdot]\max} = \frac{\mathcal{Q}_{[\cdot]} - \Delta\mathcal{Q}_{[\cdot]0}}{\mathcal{Q}_{[\cdot]}} = \frac{\Theta_{[\cdot]}\Delta\mathcal{S}_{[\cdot]} - \Delta T_{[\cdot]}\Delta\mathcal{S}_{[\cdot]0}}{\Theta_{[\cdot]}\Delta\mathcal{S}_{[\cdot]}} = \frac{\Theta_{[\cdot]} - \Delta T_{[\cdot]0}}{\Theta_{[\cdot]}} \in < 0, 1) \tag{8.3}
$$

Pro uvažované vratné (bez produkce a disipace tepla) procesy lze psát

$$
\begin{gathered}
\mathcal{S}_{[\cdot]}(X) = \frac{\mathcal{Q}_{[\cdot]}}{\Theta_{[\cdot]}} = \frac{\Delta\mathcal{Q}_{[\cdot]0}}{T_{[\cdot]0}} \quad , \quad \mathcal{S}_{[\cdot]}(Y) = \frac{\Delta A_{[\cdot]}}{\Theta_{[\cdot]}} = \mathcal{S}_{[\cdot]}(X) \cdot \eta_{[\cdot]\max} \\
\mathcal{S}_{[\cdot]}(Y|X) = 0 \quad \text{a} \quad \mathcal{S}_{[\cdot]}(X|Y) = \frac{\Delta\mathcal{Q}_{[\cdot]}}{\Theta_{[\cdot]}} \cdot \beta_{[\cdot]} = \frac{\Delta\mathcal{Q}_{[\cdot]0}}{\Theta_{[\cdot]}}
\end{gathered} \tag{8.4}
$$

Podobně jako v rovnici (6.20) píšeme

$$
\begin{aligned}
\Delta\mathcal{S}_{[\cdot]_{\mathcal{L}_{[\cdot]}}} &= \oint_{\mathcal{O}_{[\cdot]}} \frac{\delta\mathcal{Q}_{[\cdot]}}{\vartheta_{[\cdot]}} = \frac{\mathcal{Q}_{[\cdot]}}{\Theta_{[\cdot]}} - \frac{\Delta\mathcal{Q}_{[\cdot]0}}{T_{[\cdot]0}} = \oint_{\mathcal{T}_{[\cdot]}} \mathrm{d}\mathcal{S}_{[\cdot]} \\
&= \Big[\mathcal{S}_{[\cdot]}(X) - \mathcal{S}_{[\cdot]}(X)\Big] = 0, \\
\Delta\mathcal{S}_{[\cdot]_{\mathcal{A}_{[\cdot]}\mathcal{B}_{[\cdot]}}} &= -\frac{\Delta\mathcal{Q}_{[\cdot]0}}{\Theta_{[\cdot]}} + \frac{\Delta\mathcal{Q}_{[\cdot]0}}{T_{[\cdot]0}} = \frac{\Delta\mathcal{Q}_{[\cdot]0}}{T_{[\cdot]0}} \cdot \eta_{[\cdot]\max} = \frac{\mathcal{Q}_{[\cdot]}}{\Theta_{[\cdot]}} \cdot \eta_{[\cdot]\max} \geq 0 \\
\Delta\mathcal{S}_{[\cdot]_{\mathcal{C}_{[\cdot]}}} &= \Delta\mathcal{S}_{[\cdot]_{\mathcal{L}_{[\cdot]}}} + \Delta\mathcal{S}_{[\cdot]_{\mathcal{A}_{[\cdot]}\mathcal{B}_{[\cdot]}}} = \frac{\mathcal{Q}_{[\cdot]}}{\Theta_{[\cdot]}} \cdot \eta_{[\cdot]\max} \geq 0
\end{aligned} \tag{8.5}
$$

Podobně platí i následující tvar kanálové rovnice (4.15), (6.18)

$$
\begin{aligned}
\oint_{\mathcal{T}_{[\cdot]}} \mathrm{d}\mathcal{S}_{[\cdot]} &= 0, \\
&\Rightarrow \\
0 \leq \mathcal{S}_{[\cdot]}(\Xi) \cdot \eta_{[\cdot]\max} &= \Delta\mathcal{S}_{[\cdot]_{\mathcal{C}_{[\cdot]}}} < \mathcal{S}_{[\cdot]}(\Xi)
\end{aligned} \tag{8.6}
$$

Platnost *zákona růstu extenzity* je ze vztahu (8.6) zřejmá. Rovněž je zřejmé, že II. hlavní věta termodynamická je jen jeho *speciálním* případem.

Princip ekvivalence zákona zachování energie a *zákona růstu extenzity* při cyklických transformacích energie v izolované soustavě je z posledního vztahu také zřejmý.

8.2 Diferenciální informační entropie

Uvažujme spojitou náhodnou veličinu $\Xi = [\mathcal{X}, w(\cdot)]$ s výběrovým prostorem $\mathcal{X} \subseteq \mathrm{R}^+$ a s hustotou pravděpodobnosti $w(x) \geq 0$, $x \in \mathcal{X}$. Uvažujme pravděpodobnost $p(x_i)$ výskytu hodnoty $x_i \in \mathcal{X}$ v intervalu $\Delta x = x_j - x_{j-1}, \quad x_j > x_i > x_{j-1}, \quad i,\ j \in \mathrm{N}$ tak, že platí

$$p(x_i) = w(x_i)\Delta x$$

Pro informační množství $\mathcal{I}(x_i)$ takového jevu platí

$$\mathcal{I}(x_i) = -\ln[w(x_i)\Delta x] \tag{8.7}$$

Je zřejmé, že $\lim\limits_{\Delta x \longrightarrow 0} \mathcal{I}(x_i) = +\infty$. Je také zřejmé, že entropie $H'(X)$ spojité náhodné veličiny Ξ roste nade všechny meze;

$$\begin{aligned} H'(X) &= \lim_{\Delta x \longrightarrow o} -\sum_i w(x_i)\Delta x \cdot \ln[w(x_i)\Delta x] \qquad (8.8)\\ &= -\int_{\mathcal{X}} w(x)\ln w(x)\mathrm{d}x - \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \sum_i [w(x_i)\Delta x]\ln(\Delta x) \\ &= -\int_{\mathcal{X}} w(x)\ln w(x)\mathrm{d}x - \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \ln(\Delta x) = +\infty \end{aligned}$$

Zavedeme tedy referenční veličinu Ξ_0 a stejným způsobem spočítáme *referenční entropii* $H'(\Xi_0)$. Rozdílem $H'(\Xi) - H'(\Xi_0)$ zrušíme divergující členy $\lim\limits_{\Delta x \longrightarrow o} \ln(\Delta x)$ a získáme tzv. *diferenciální (relativní) entropii*

$$\begin{aligned} H''(\Xi) &= H'(\Xi) - H'(\Xi_0) = H(\Xi) - H(\Xi_0) \\ &= -\int_{\mathcal{S}(X)} w(x)\ln w(x)\mathrm{d}x + \int_{\mathcal{S}(X_0)} w_0(x_0)\ln w_0(x_0)\mathrm{d}x_0 \end{aligned}$$

Můžeme si představit, že volíme $H'(\Xi_0)$ tak, že druhý, refernční intgerál nabývá velmi malých hodot (0^+). Pak by nám zbyl jen integrál první. Tedy definitoricky klademe $H'(\Xi_0) = 0$ a pak $H''(\Xi) = H(\Xi)$. Potom definujeme *informační (diferenciální, relativní) entropiii* spojité náhodné veličiny Ξ vztahem

$$H(\Xi) \stackrel{\mathrm{Def}}{=} -\int_{\mathcal{X}} w(x)\ln w(x)\mathrm{d}x \tag{8.9}$$

Tato definice je v souladu s definicí střední hodnoty náhodné veličiny, tedy podobně jako v případě diskrétním platí

$$H(\Xi) = E[\mathcal{I},\ w(x)] = E[-\ln(w(x)] \tag{8.10}$$

$$H(\Xi) = -K\int_{\xi \in \mathcal{X}} p_\xi \ln p_\xi \ \mathrm{d}\xi \tag{8.11}$$

kde $\mathcal{X}$ je sjednocení *nedegenerovaných* intervalů z množiny $\mathrm{R}^+ = (-\infty,\ \infty)$ a veličina $p(\xi) \geq 0,\ \ \xi \in \mathcal{X},$ je *hustota* pravděpodobnosti náhodné veličiny Ξ. V teorii pravděpodobnosti ji nazýváme *relativní mírou neurčitosti hustoty* pravděpodobnosti $p(\xi)$. Lze ji definovat pro libovolnou spojitou náhodnou veličinu.

8.3 Stavový prostor, náhradní stav

Klasická termodynamika zkoumá vlastnosti *termodynamických, makroskopických* systémů.

Pojmem *termodynamický systém* označujeme *jednoduše souvislou* část prostoru (trojrozměrného) obsahující jistý (velký) počet m jeho vzájemně neinteragujících *konstituentů*, např. N částic nebo látkových množství, $m \leq N$. Zbývající část fyzikálního světa nazýváme *okolí systému*.

Podle způsobu imterakce termodynamického systému a jeho okolí rozlišujeme tyto tři druhy systémů [44]:

a) ***Izolovaný systém*** - se svým okolím *nevyměňuje*, ani *hmotu* (částice s nenulovou klidovou hmotností) ani *energii* [*mechanickou* energii, *tepelné* [fotonové (elktromagnetické) zářenı; fotony mají nulovou klidovou hmotnost].

b) ***Uzavřený systém*** - se svým okolím *vyměňuje energii*, ale *nevyměňuje hmotu*.

c) ***Otevřený systém*** - se svým okolím *vyměňuje energii* i *hmotu*.

Klasická, makroskopická, fenomenologická termodynamika vychází z fenomenologického přístupu: používá měření veličin, teploty Θ, tlaku p, objemu V, tepeln´ energie Q, Clausiovy entropie S_{Claus}, hmotnosti atp. Veličiny, jejichž hodnoty jsou konstantní v celém systému, tj. nejsou závislé na prostorových souřadnicích, jsou *vnější (globální, extenzivní, makroskopické)*: V, Q, S_{Claus}, hmotnost, atd., mají vlastnost *aditivity*.
Veličiny, jejichž hodnoty nejsou konstantní v celém systému, jsou závislé na prostorových souřadnicích, jsou *vnitřní (lokální, intenzivní, mikroskopické)*: p, Θ, koncentrace, atd., *nejsou* aditivní.

8.3.1 Stavový prostor

Soubor hodnot makroskopických proměnných a mikroskopických proměnných (ovšem s konstantní hodnotou v celém systému) popisuje rovnovážný stav systému, a to určitou stavovou rovnicí (např. $pV = R\Theta$). Tento soubor hodnot relevantních stavových proměnných je *stavovým prostorem* systému.
Možná posloupnost rovnovážných stavů systému pak leží na křivkách *stavových diagramů*, např. diagramu $p - V$, $S - \Theta$ apod.
Možnou posloupnost (rovnovážných) stavů systému *adiabatického* (nevyměnůje se svým okolím teplo, $\delta Q = 0$, izolovaný systém), určují Caratheodoryho věty, resp. Caratheodoryho formulace II. hlavní věty termodynamické.

Je ovšem třeba uvažovat i situaci, kdy izolovaný systém nebude v rovnovážném stavu a následně bude procházet přirozenou změnou, posloupností stavů, které jsou nerovnovážné; prochází tedy celkovou změnou nevratnou. Nebo v něm bude probíhat nevratné generování tepla způsobené jeho *neideálostí*. Krátce, bude v něm probíhat *disipace* tepla.

Statistická termodynamika (rovnovážných i nerovnovážných stavů) vychází z názoru, že termodynamický systém je tvořen velkým počtem N částic idealizovaných jako hmotné body. Ty se řídí Newtonovými pohybovými zákony. Z tohoto názoru pak vyplývá tvrzení II. hlavní věty termodynamické.

Pohyb i-tého hmotného bodu je v kartézských souřadnicích popsán *pohybovými rovnicemi* [44, 58]

$$F_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{x}_i), \quad i = 1,\ ...,\ N \tag{8.12}$$

kde
F_i je složka síly $\overrightarrow{F}$ ve směru souřadnice x_i,
p_i je složka hybnosti $\overrightarrow{p}$ ve směru souřadnice x_i,
$\dot{x}_i$ je složka rychlosti $\overrightarrow{\dot{x}}$ ve směru souřadnice x_i,
m je hmotnost bodu.

V analytické mechanice používáme *zobecněné* polohové a hybnostní souřadnice

$$q_i = q_i(x_{1,\ ...,\ x_{3N}}), \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{8.13}$$

kde
$L = E_\mathrm{K} - E_\mathrm{P}$ je *Lagrangeova funkce,*
$E_\mathrm{K} = E_\mathrm{K}(q, \dot{q})$ je kinetická energie systému,
$E_\mathrm{P} = E_\mathrm{P}(q)$ je potenciální energie systému.

Dvojice p_i, q_i tvoří jsou tzv. *kanonicky konjugované* proměnné, pro něž platí Lagrangeovy rovnice druhého druhu,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} = U_n \tag{8.14}$$

popisující *kanonicky přípustný* pohyb, vývoj systému (U_n je *vtištěná nepotenciálová* síla) [51, 58].

Stav systému můžeme vyjádřit *reprezentativním* bodem $6N$-rozměrného *fázového* [$3N$-rozměrného *polohového* a $3N$-rozměrného *hybnostního (impulsového)* prostoru]. Jeho trajektorie vyjadřuje časový vývoj systému.

Ve statistické fyzice nepočítáme s hodnotami p_i, q_i, ale jen s pravděpodobnostmi jejich výskytu v určitých intervalech

$$0 < \mathcal{W}(q_{i0} \leq q_i \leq q_{io} +\ \mathrm{d}q_i,\ p_{i0} \leq p_i \leq p_{i0} +\ \mathrm{d}p_i) \leq 1 \tag{8.15}$$

popř. s hustotu pravděpodobnosti $\mathcal{W}(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}) \geq 0$. Známe-li pravděpodobnost výskytu reprezentativního bodu v intervalu fázového prostoru Ω, můžeme za reprezentanta stavu systému volit jeho *buňku*, objemový element $\Delta\Omega$,

$$\Delta\Omega = (\Delta p_1,\ ...,\ \Delta p_{3N},\ \Delta q_1,\ ...,\ \Delta q_{3N}) \tag{8.16}$$

Časové změny stavu systému jsou v tomto případě vyjádřeny posloupností *kanonických* transformací (určených Lagrangeovými rovnicemi) prostoru Ω na sebe sama.

Přitom platí ***Liouvillův teorém*** [41, 44], který říká:

Buňka $\Delta\Omega$ kanonickými transformacemi prostoru Ω mění svůj tvar, ale nikoli svůj (tzv. fázový) objem,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta\Omega) = 0 \tag{8.17}$$

Pro minimální objem $\Delta\Omega = \Delta\overrightarrow{p} \cdot \Delta\overrightarrow{q}$ buňky fázového prostoru platí

$$\Delta\overrightarrow{p} \cdot \Delta\overrightarrow{q} = (2\pi\hbar)^{3N} \tag{8.18}$$

kse $\hbar$ je redukovaná *Planckova konstanta*. Počet buěk fázového prostoru se nazývá počet *kvantových stavů systému (částice)*.

Uvažujme nyní N částc A_i ideálního plynu. Pro jednoduchost uvažujme, že u každé částice A_i rozlišujeme jen jednu souřadnici p_{A_i} a jednu souřadnici q_{A_i}. Pokud se čátice A_i nacházı v buňce (ve stavu) j,

$$q_j - \frac{\Delta q}{2} \leq q_{A_i} \leq q_j + \frac{\Delta q}{2}, \quad p_j - \frac{\Delta p}{2} \leq p_j \leq p_j + \frac{\Delta p}{2}, \quad j = 1,\ ...,\ m \tag{8.19}$$

říkáme, že je v j-tém (kvantovém) stavu (p_j, q_j).

Jednotlivé částice jsou (makroskopicky) *nerozlišitelné*, a proto můžeme s jistotou zjistit jen to, že jisté, např dvě částice jsou v téže buňce, ale *ne, které* to jsou (jaké hodnoty mají jejich indexy i). Libovolné možné seskupení těchto nerozlišitelných částic ve stejných jejich počtech a ve stejných buňkách prostoru Ω nazýváme *mikrostav* (systému). Množinu všech takovýchto nerozlišitelných seskupení nazýváme *makrostav* (systému).

Počet všech mikrostavů systému konstituujícím právě jeden makrostav nazýváme *termodynamická pravděpodobnost* $\tilde{P}$ daného makrostavu,

$$\tilde{P} = \frac{N!}{\prod\limits_{j=1}^{m} N_j!}, \quad \sum_{j=1}^{m} N_j = N \tag{8.20}$$

Makrostav systému (ve smyslu celého fázového prostoru) je *maximálně uspořádaný, rozlišitelný*, pokud pro nějaké j platí $N_j = N$. Je *minimálně uspořádaný*, je *maximálně nerozlišitelný* pokud jsou všechny buňky z Ω obsazeny stejným počtem částic, $N_j = \text{konst}, \quad j = 1,\ ...,\ m$.

8.3.2 Náhradní stav

Chceme-li určit změnu (termodynamické, Clausiovy) entropie při nevratném procesu převádějícího soustavu z počátečního do koncového stavu, je třeba najít zpusob, jak tento proces vyjádřit vratně [57]. Je tomu tak proto, še Clausiova entropie je definována pro termodynamické ekvilibrium (při konstantní teplotě Θ, *termicky homogenní systém*), *termostaticky.* Tehdy platí, že $\mathrm{d}S = \dfrac{\delta Q}{\Theta} = 0 \Rightarrow S = \text{konst.}$ Tudíž, stoupne-li S_{Claus} v jedné části soustavy, v jiné musí stejně klesnout.

Nechť v izolované soustavě (části troj-rozměrného prostoru) probíhá nevratný proces přechodu tepla z tělesa teplejšího na těleso chladnější. Pak uvažujeme *náhradní* vratný děj v ideálním plynu $\mathcal{L}$ takto:

a) uvedeme $\mathcal{L}$ do diatermického styku s tepelným rezervoárem $\mathcal{A}$ o teplotě Θ_W a necháme probíhat izotermickou expanzi tak dlouho, až $\mathcal{L}$ přijme teplo ΔQ_W;

b) $\mathcal{L}$ dokanale tepelně odizolujeme od jeho okolí a necháme adiabaticky expandovat, až se ochladí na teplotu Θ_0;

c) uvedeme $\mathcal{L}$ do diatermického styku s chladnějším rezervoárem $\mathcal{B}$ o teplotě Θ_0 a provádíme izotermickou kompresi při teplotě Θ_0 až $\mathcal{L}$ odevzdá do $\mathcal{B}$ teplo $\Delta Q_0 = \Delta Q_W$.

Protože entropie $\mathcal{A}$ poklesla o $\dfrac{\Delta Q_W}{\Theta_W}$ a entropie $\mathcal{B}$ stoupla o $\dfrac{\Delta Q_W}{\Theta_0}$ a protože $\Theta_W > \Theta_0$, pro celkovou změnu entropie $\Delta S_{\mathcal{AB},\text{Claus}}$ soustavy $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ platí

$$\Delta S_{\mathcal{AB},\text{Claus}} = -\frac{\Delta Q_W}{\Theta_W} + \frac{\Delta Q_W}{\Theta_0} > 0 \tag{8.21}$$

Pro změnu entropie $\mathcal{L}$ naopak patí

$$\Delta S_{\mathcal{L},\text{Claus}} = +\frac{\Delta Q_W}{\Theta_W} - \frac{\Delta Q_W}{\Theta_0} < 0 \tag{8.22}$$

Pro celkovou změnu entropie izolované soustavy $\mathcal{A}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{B}$ pak platí

$$\Delta S_{\mathcal{AB},\text{Claus}} + \Delta S_{\mathcal{L},\text{Claus}} = \Delta S_{\text{rev,Claus}} = 0 \tag{8.23}$$

Pokud bychom uvažovali původní nevratný proces, v izolovaném systému $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ by platilo

$$\Delta S_{\text{irrev}} = -\frac{\Delta Q_W}{\Theta_W} + \frac{\Delta Q_W}{\Theta_0} > 0 \tag{8.24}$$

Změna entropie vyvolaná nevratným procesem je tedy určitelná jako změna entropie na ekvivalentní rovnovážné cestě. Tehdy integrujeme totální diferencál $\mathrm{d}S$ po křivce *l náhradních* rovnovážných stavů z počátečniího stavu $\boldsymbol{\theta}_0$ do koncového stavu $\boldsymbol{\theta}$ tak jak je dáno naším postupem podle bodů a), b), c);

$$\int_{l,\boldsymbol{\theta}_0}^{\boldsymbol{\theta}} \mathrm{d}S = \Delta S_{\mathcal{AB},\text{Claus}} = \Delta S_{\text{irrev}} \tag{8.25}$$

Pokud uvažujeme časový vývoj nerovnovážného systému statisticky, pak prochází posloupností nerovnovážných makrostavů s termodynamickými pravděpodobnostmi

$$(\tilde{P}_z)_{z=0}^{Z}, \quad \tilde{P}_{z+1} \geq \tilde{P}_{z+1}, \quad \ln \tilde{P}_Z = \frac{N!}{\prod_{z=1}^{m} N_j!}, \quad N_j \geq 1, \quad j = 1, \ldots, m \tag{8.26}$$

až do koncového makrostavu rovnovážného: $N = m, \; N_j = 1, \; \tilde{P} = \ln N!$.

Uvažujme izotermickou expanzi do vakua při teplotě Θ. Každému nerovnovážnému makrostavu lze přisoudit hodnotu S_{Claus} *ekvivalentního* systému *rovnovážného* s touže energií Q, ale při vhodné (myšlené) teplotě $T' = u \cdot \Theta, \; u \geq 1$. V koncovém stavu, ekvilibriu $u = 1$.

8.4 Boltzmannova konstanta

Uvažujeme termodynamický systém (v rovnvážném stavu $\boldsymbol{\theta}$), kterým je látkové množství 1 kmol (tj. N_A částic) ideálního plynu o objemu $2v$ a při teplotě Θ_0, oproti počátečnímu rovnovážnému stavu $\boldsymbol{\theta}_0$ s objemem v a při téže teplotě Θ_0. Potom podle rovnic (3.30) a (3.31) platí

$$\Delta S = S - S_0 = \int_{\boldsymbol{\theta}_{0,\mathrm{rev}}}^{\boldsymbol{\theta}} \frac{\delta q}{\Theta} = c_v \ln \frac{\Theta_0}{\Theta_0} + R \ln \frac{2v}{v} = R \ln 2$$

V počátečním (rovnovážném) stavu $\boldsymbol{\theta}_0$ je tedy všech N_A částic systému rovnoměrně rozděleno v počátečním objemu (buňce) v (v tomto okamžiku jedině rozlišovaném), a tedy $\tilde{P}_0 = 1$. V koncovém rovnovážném, *stabilním* stavu $\boldsymbol{\theta}$ je těchto N_A částic rovnoměrně rozděleno v koncovém (celkovém) objemu $2v$ (zde již rozlišujeme buňky s objemy $v_1 = v$ a $v_2 = v$), který má plyn pro svůj vývoj k tomuto koncovému (rovnovážnému, stabilnímu) stavu k dispozici.[35] Podle vztahu (3.55) je tedy termodynamická pravděpodobnost koncového stavu $\boldsymbol{\theta}$

$$\tilde{P} = \frac{N_A!}{\left(\frac{N_A}{2}\right)! \left(\frac{N_A}{2}\right)!}$$

Protože N_A je Avogadrova konstanta, je dostatečně veliká a lze použít *Stirlingovu* aproximaci

$$N_A! = \left(\frac{N_A}{\mathrm{e}}\right)^{N_A}$$

[35]Pochopitelně je možno, podle rovnic (3.55), uvažovat m různých objemů v_i, $m \geq 2$, $\sum_{i=1}^{m} v_i = v$.

Potom

$$\frac{\left(\frac{N_A}{\mathrm{e}}\right)^{N_A}}{\left(\frac{N_A}{2\mathrm{e}}\right)^{\frac{N_A}{2}}\left(\frac{N_A}{2\mathrm{e}}\right)^{\frac{N_A}{2}}} = 2^{N_A}$$

Je zřejmé, že

$$\Delta S = K \ln 2^{N_A} = R \ln 2 \quad \text{a tedy} \quad K = \frac{R}{N_A} \triangleq k$$

Pro hodnotu entropie S sledovaného systému s celkovým množstvím mikrostavů Γ, v makrostavu tvořeném $\tilde{P}$ mikrostavy, tedy podle rovnice (3.62) platí

$$S = k \cdot \ln \frac{P}{P_0} + S_0 \quad \text{nebo} \quad k \cdot \ln \frac{\tilde{P}}{\tilde{P}_0} + S_0$$

8.5 Shannonův teorém o kapacitě kanálu

8.5.1 Asymptotická ekvipartiční vlastnost zdrojů zpráv

Tato vlastnost je formulována ***asymptotickým ekvipartičním teorémem*** zdrojů zpráv, který říká:

Je-li $(\xi_i)_{i=1}^n$ zpráva délky n generovaná nezávislým zdrojem zpráv $\Xi = [\mathcal{X}, p(\cdot)]$ (pojem nezávislost značí, že ξ_i jsou realizacemi nezávislých náhodných veličin $\Xi_i \equiv \Xi$), (informační) entropie zdroje Ξ je $H(\Xi) = -\sum_{\mathcal{X}} p(\xi) \ln p(\xi)$, platí[36]

$$-\frac{1}{n} \cdot \ln p[(\xi)_{i=1}^n] \xrightarrow{P} H(\Xi) \tag{8.27}$$

Důkaz: Pravděpodobnosti $p(\xi_i)$ jsou nezávislé a tedy aritmetický průměr

$$\overline{\mathcal{I}} = -\frac{1}{n} \cdot \ln[p(\xi_i)_{i=1}^n] = -\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \ln p(\xi_i) \tag{8.28}$$

Jelikož $H(\Xi) = E[-\ln p(\cdot)]$, platí $\overline{\mathcal{I}} \xrightarrow{P} H(X)$. Aritmetický průměr informačního množství $\overline{\mathcal{I}}$ ve znaku $\xi_{[\cdot]}$ konverguje, *podle pravděpodobnosti*, k entropii $H(X)$.

Smysl tvrzení (8.27) je tento:

Většina zpráv je přibližně stejné pravděpodobnosti - mají ekvipartiční (stejné) rozdělení pravděpodobnosti. Jejich možinu nazýváme *typická množina*. Zbývající zprávy

[36]Konverguje *podle pravděpodobnosti*:

$$p\left(\left|\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \Xi_i - \sum_{i=1}^n \xi_i p(\xi_i)\right| > \varepsilon\right) \le \frac{(\sigma_{\overline{\Xi}})^2}{n\varepsilon^2} \longrightarrow 0, \quad \forall \varepsilon > 0;$$

Čebyševova nerovnost pro *výběrový* průměr je $\overline{\Xi}$; *slabý zákon velkých čísel.* [12]

jsou (velmi) málo pravděpodobné.

Typická množina $\boldsymbol{A}_\varepsilon^n \subset \mathcal{X} \stackrel{\triangle}{=} I^*$ zdroje zpráv Ξ pro dané $\varepsilon > 0$ a $n \in \mathrm{N}$ má tyto vlatnosti:

a)
$$\begin{aligned} (\xi_{i=1}^n) &\in \boldsymbol{A}_\varepsilon^n \\ &\Leftrightarrow \\ \mathrm{e}^{-n[H(\Xi)+\varepsilon]} &\leq p[(\xi_i)_{i=1}^n] \leq \mathrm{e}^{-n[H(\Xi)-\varepsilon]}, \\ H(\Xi)-\varepsilon &\leq -\frac{1}{n}\cdot \ln\{p[(\xi_i)_{i=1}^n]\} \leq H(\Xi)+\varepsilon \end{aligned} \tag{8.29}$$

b)
$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0 \ \Rightarrow\ P\left[\boldsymbol{A}_\varepsilon^n\right] \geq (1-\varepsilon). \tag{8.30}$$

Důkaz b:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}_\varepsilon^n &= \left\{(\xi_i)_{i=1}^n \in I^n : \ \left|-\frac{1}{n}\cdot \ln\{p[(\xi_i)_{i=1}^n] - H(\Xi)\right| \leq \varepsilon\right\} \\ &= I^n - \left\{(\xi_i)_{i=1}^n \in I^n : \ \left|-\frac{1}{n}\cdot \ln p[(\xi_i)_{i=1}^n] - H(\Xi)\right| > \varepsilon\right\} \\ &\Rightarrow P\left[\boldsymbol{A}_\varepsilon^n\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \ \Rightarrow P\left[\boldsymbol{A}_\varepsilon^n\right] \geq 1-\varepsilon \end{aligned} \tag{8.31}$$

c)
$$|\boldsymbol{A}_\varepsilon^n| \leq \mathrm{e}^{n[H(\Xi)+\varepsilon)]}. \tag{8.32}$$

Důkaz c:

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{I^n} p[(\xi_i)_{i=1}^n] \geq \sum_{\boldsymbol{A}_\varepsilon^n} p[(\xi_i)_{i=1}^n] \geq \sum_{\boldsymbol{A}_\varepsilon^n} \mathrm{e}^{-n[H(\Xi)+\varepsilon]} \\ &= \mathrm{e}^{-n[H(\Xi)+\varepsilon]} \cdot \sum_{\boldsymbol{A}_\varepsilon^n} 1 = |\boldsymbol{A}_\varepsilon^n| \cdot \mathrm{e}^{n[H(\Xi)+\varepsilon)]} \end{aligned} \tag{8.33}$$

d)
$$|\boldsymbol{A}_\varepsilon^n| \geq (1-\varepsilon)\cdot \mathrm{e}^{n[H(\Xi)-\varepsilon)]}. \tag{8.34}$$

Důkaz d:

$$\begin{aligned} (1-\varepsilon) &\leq \sum_{\boldsymbol{A}_\varepsilon^n} p[(\xi_i)_{i=1}^n] \leq \sum_{\boldsymbol{A}_\varepsilon^n} \mathrm{e}^{-n[H(\Xi)-\varepsilon]} \quad \text{tj.} \\ \mathrm{e}^{-n[H(\Xi)-\varepsilon]} \cdot \sum_{\boldsymbol{A}_\varepsilon^n} 1 &= |\boldsymbol{A}_\varepsilon^n| \cdot \mathrm{e}^{-n[H(\Xi)-\varepsilon]} \geq (1-\varepsilon) \end{aligned} \tag{8.35}$$

Vlastosti c) a d) dohromady říkají, že platí

$$(1-\varepsilon)\cdot \mathrm{e}^{n[H(\Xi)-\varepsilon]} \leq |\boldsymbol{A}_\varepsilon^n| \leq \mathrm{e}^{n[H(\Xi)+\varepsilon]} \tag{8.36}$$

a tedy že pro mohutnost $|\boldsymbol{A}_\varepsilon^n|$ typické množiny $\boldsymbol{A}_\varepsilon^n$, pro $n >> 1,\ 0 < \varepsilon << 1$ platí

$$|\boldsymbol{A}_\varepsilon^n| \approx \mathrm{e}^{n[H(\Xi)]} \tag{8.37}$$

8.5.2 Dekodér výstupních zpráv

Uvažujeme přenosový kanál $\mathcal{K} = [X, \beta, Y]$, kde $X = [A, p_X(\cdot)]$, $Y = [B, p_Y(\cdot)]$. Nechť $\boldsymbol{\theta} = [A^m, p_\alpha(\cdot)]$ je zdroj vstupních zpráv $\mathbf{x} \overset{\triangle}{=} (\boldsymbol{\theta}_i)_{i=1}^m$ a $\boldsymbol{\alpha} = [B^m, p_{\boldsymbol{\alpha}}(\cdot)]$ je zdroj výstupních zpráv $\mathbf{y} \overset{\triangle}{=} (\alpha_i)_{i=1}^m$ přenosového kanálu $\mathcal{K}^m = [\boldsymbol{\theta}, P_{\mathrm{err}}^m, \boldsymbol{\alpha}]$.
Chceme nalézt zobrazení d_m, *dekodér* výstupních zpráv

$$d_m : \ B^m \to A^m \tag{8.38}$$

Pro pravděpodobnost chyby $\boldsymbol{\theta} \neq d_m(\boldsymbol{\alpha})$, tj. chyby přenosu $\mathcal{T}^m$ v kanálu $\mathcal{K}^m$ platí

$$\begin{aligned} p\,[\boldsymbol{\theta} \neq d_m(\boldsymbol{\alpha})] &= \sum_{B^m} p_{\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\alpha}} \{[\boldsymbol{\theta} \neq d_m(\boldsymbol{\alpha})] \,|\, [\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{y}]\} \cdot p_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{y}) \\ &= \sum_{B^m} \{1 - p_{\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\alpha}} [(d_m(\mathbf{y})) \,|\mathbf{y}] \cdot p_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{y})\} \end{aligned} \tag{8.39}$$

Výraz (8.39) minimalizuje maximální hodnota $p_{\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\alpha}} [(d_m(\mathbf{y})) \,|\mathbf{y}]$, $\forall \mathbf{y} \in B^m$. Podle *Bayesovského* pravidla maximální *aposteriorní* pravděpodobnosti [15] volíme

$$d_m(\mathbf{y}) = \mathrm{argmax}\{p_{\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}|\mathbf{y})\}, \ \forall \mathbf{y} \in B^m \tag{8.40}$$

Též můžeme psát

$$\begin{aligned} p_{\boldsymbol{\theta}}[\boldsymbol{\theta} \neq d_m(\boldsymbol{\alpha})] &= \sum_{A^m} p_{\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}} \{[\boldsymbol{\theta} \neq d_m(\boldsymbol{\alpha})] \,|\, [\boldsymbol{\theta} = \mathbf{x}]\} \cdot p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}) - \\ &- \sum_{A^m} \{1 - p_{\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}} \left[\left(d_m^{-1}(\mathbf{x})\right) |\mathbf{x}\right]\} \end{aligned} \tag{8.41}$$

Množina $D_{\mathbf{x}} = d_m^{-1}(\mathbf{x}) \subset B^m$ je prvkem třídy množin, která je disjunktním rozkladem množiny B^m. Vyžadujeme maximální pravděpodobnost těchto množin $D_{\mathbf{x}}$,

$$p_{\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}} [(D_{\mathbf{x}})|\mathbf{x}] \geq 1 - \varepsilon \ \Rightarrow \ p_{\boldsymbol{\theta}} [\boldsymbol{\theta} \neq d_m(\boldsymbol{\alpha})] \ < \ \varepsilon, \ \ \forall \mathbf{x} \in A^m \tag{8.42}$$

Je otázka, jak určit pravděpodobnost P_{err} chybného rozpoznání vyslaného $\mathbf{x}$. To je kódováno jinak, než z z množiny $D_{\mathbf{x}}$;

$$P_{\mathrm{err}}(\mathbf{x}) = p_{\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{B}^m - D_{\mathbf{x}}|\mathbf{x}) = \max[P_{\mathrm{err}}(\mathbf{x}_j)] \ < \ \varepsilon, \ \ 1 \leq j \leq \mathcal{M} \tag{8.43}$$

kde $\mathcal{M}$ je počet zpráv délky m.
Chceme, aby se množiny $D_{\mathbf{x}}$ nepřekrývaly; takový kód se nazývá $(m, \mathcal{M}, \varepsilon)$-kód. Veličiny m, $\mathcal{M}$ a ε jsou vzájemně závislé,

$$m = m(\mathcal{M}, \varepsilon), \ \ \mathcal{M} = \mathcal{M}(m, \varepsilon), \ \ \varepsilon = \varepsilon(m, \mathcal{M}) \tag{8.44}$$

Dále zavádíme pojem *rychlost produkce informace zdrojem zpráv*, $\mathcal{R}$,

$$\mathcal{R} \overset{\mathrm{Def}}{=} \frac{\ln \mathcal{M}}{m} \tag{8.45}$$

kde $\ln \mathcal{R}$ je maximální neurčitost (*varieta* [1]) *zdroje zpráv* Ξ, *který je kódem* $(m, \mathcal{M}, \varepsilon)$ *přenositelným* kanálem $C_{\mathcal{K}^m}$.

Pokud $\mathcal{R} = \dfrac{\ln \mathcal{M}}{m}$, máme $(m, \mathrm{e}^{m\mathcal{R}}, \varepsilon)$-kód. Dále nás zajímá maximum

$$\max\{\mathcal{R}:\ \forall m \geq m_0\ \Rightarrow\ \exists\ (m, \mathrm{e}^{m\mathcal{R}}, \varepsilon)\text{-kód}\} \tag{8.46}$$

pomocí něhož definujeme informační kapacitu $C_{\mathcal{K}^m}$ kanálu $\mathcal{K}^m$,

$$C_{\mathcal{K}^m} \stackrel{\mathrm{Def}}{=} \max\{\mathcal{R}:\ \forall \varepsilon > 0\ \exists m_0\ \Rightarrow \forall m \geq m_0\ \Rightarrow\ \exists\ (m, \mathrm{e}^{m\mathcal{R}}, \varepsilon)\text{-kód}\} \tag{8.47}$$

Nechť nyní

$$\mathcal{A}^m \subset A^m, \quad |\mathcal{A}^m| = \mathcal{M} \tag{8.48}$$

a nechť $(m, \mathrm{e}^{m\mathcal{R}}, \varepsilon)$-kód umožňuje *disjunktní* rozklad B^m na $D_{\mathbf{x}}$ tak, že

$$B^m = \{D_{\mathbf{x}}:\ \mathbf{x} \in \mathcal{A}^m\}, \quad \sum_{\mathbf{y} \in D_{\mathbf{x}}} p_{\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = p_{\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}}(D_{\mathbf{x}}|\mathbf{x}) \geq 1 - \varepsilon \tag{8.49}$$

Dekodér výstupní zprávy konstruujeme podle pravidla *maximální věrohodnosti* [15]

$$d_m^{-1}(\mathbf{x}) = \operatorname{argmax}\left[p_{\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}|\mathbf{x})\right],\ \mathbf{x} \in \mathcal{A}^m \tag{8.50}$$

8.5.3 Důkaz Shannonova teorému

Tento důkaz je založen na *asymptotickém ekvipartičním* teorému. Konstruujeme typickou množinu zpráv (zdvojeného zdroje) $\boldsymbol{\Upsilon}_\varepsilon^m$,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Upsilon}_\varepsilon^m &\subset A^m \times B^m \\ &= \Big\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}):\ \left|\frac{1}{m} \cdot \ln p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}) - H(X)\right| < \varepsilon;\ \left|\frac{1}{m} \cdot \ln p_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{y}) - H(Y)\right| < \varepsilon; \\ &\qquad \left|\frac{1}{m} \cdot \ln p_{\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - H(X, Y)\right| < \varepsilon\Big\} \end{aligned} \tag{8.51}$$

Pro typickou množinu $\boldsymbol{\Upsilon}_\varepsilon^m$ *z (8.51) platí asymptotický ekvipartiční teorém:*
$(m \to \infty,\ \varepsilon \to 0)$,

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & P\left[(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \boldsymbol{\Upsilon}_\varepsilon^m\right] \longrightarrow 1 \\ \text{b)} & |\boldsymbol{\Upsilon}_\varepsilon^m| \leq \mathrm{e}^{m[H(X,Y)+\varepsilon]} \\ \text{c)} & |\boldsymbol{\Upsilon}_\varepsilon^m| \geq (1 - \varepsilon)\mathrm{e}^{m[H(X,Y)-\varepsilon]} \\ \text{d)} & P\left[(\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})\right] = p_{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}(\mathbf{x}) \cdot p_{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}}(\mathbf{y}), \quad \tilde{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}} \in A^m, B^B \ \text{ nezávislé} \\ & P\left[(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})\right] = p_{\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}) \cdot p_{\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}) \\ & P\left[(\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}) \in \boldsymbol{\Upsilon}_\varepsilon^m\right] \leq \mathrm{e}^{-m[T(X;Y)-3\varepsilon]} \\ \text{e)} & P\left[(\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}) \in \boldsymbol{\Upsilon}_\varepsilon^m\right] \geq (1 - \varepsilon) \cdot \mathrm{e}^{-m[T(X;Y)-3\varepsilon]} \end{array} \tag{8.52}$$

Důkaz:

ad a) $$\rho_1 = \left\{ \mathbf{x} : \left| \frac{1}{m} \cdot \ln p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}) - H(X) \right| \geq \frac{\varepsilon}{3} \to 0 \right\} \longrightarrow \emptyset \tag{8.53}$$

$$\rho_2 = \left\{ \mathbf{y} : \left| \frac{1}{m} \cdot \ln p_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{y}) - H(Y) \right| \geq \frac{\varepsilon}{3} \to 0 \right\} \longrightarrow \emptyset$$

$$\rho_3 = \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \left| \frac{1}{m} \cdot \ln p_{\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - H(X,Y) \right| \geq \frac{\varepsilon}{3} \to 0 \right\} \longrightarrow \emptyset$$

$\Rightarrow$

$$p\left\{ \boldsymbol{\Upsilon}_\varepsilon^m = [A^m \times B^m - (\rho_1 \cup \rho_2 \cup \rho_3)] \right\} \longrightarrow 1$$

ad b) $$\sum_{A^m \times B^m} p_{\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1$$

$$\geq \sum_{\boldsymbol{\Upsilon}_\varepsilon^m} p_{\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq \sum_{\boldsymbol{\Upsilon}_\varepsilon^m} \mathrm{e}^{-m[H(X,Y)+\varepsilon]} = |\boldsymbol{\Upsilon}_\varepsilon^m| \cdot \mathrm{e}^{-m[H(X,Y)+\varepsilon]}$$

ad c) $$P\left[\boldsymbol{\Upsilon}_\varepsilon^m\right] \;\geq\; 1 - \varepsilon$$

$$|\boldsymbol{\Upsilon}_\varepsilon^m| \cdot \mathrm{e}^{-m[H(X,Y)-\varepsilon]} \;\geq\; \sum_{\boldsymbol{\Upsilon}_\varepsilon^m} p_{\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \;\geq\; 1 - \varepsilon$$

$$(1 - \varepsilon) \cdot \mathrm{e}^{+m[H(X,Y)-\varepsilon]} \;\leq\; |\boldsymbol{\Upsilon}_\varepsilon^m|$$

ad d) $$P\left[(\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}) \in \boldsymbol{\Upsilon}_\varepsilon^m \right] \;=\; \sum_{\boldsymbol{\Upsilon}_\varepsilon^m} p_{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}(\mathbf{x}) \cdot p_{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}}(\mathbf{y}) \;\leq\; \sum_{\boldsymbol{\Upsilon}_\varepsilon^m} \mathrm{e}^{-m[H(X)-\varepsilon]} \cdot \mathrm{e}^{-m[H(Y)-\varepsilon]}$$

$$= |\boldsymbol{\Upsilon}_\varepsilon^m| \cdot \mathrm{e}^{-m[H(X)+H(Y)-2\varepsilon]} \leq \mathrm{e}^{m[H(X,Y)+\varepsilon-H(X)-H(Y)+2\varepsilon]}$$

$$= \mathrm{e}^{-m[H(X)+H(Y)-H(X,Y)-3\varepsilon]} \triangleq \mathrm{e}^{-m[T(X;Y)-3\varepsilon]}$$

ad e) $$P\left[(\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}) \in \boldsymbol{\Upsilon}_\varepsilon^m) \right] \;=\; \sum_{\boldsymbol{\Upsilon}_\varepsilon^m} p_{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}(\mathbf{x}) \cdot p_{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}}(\mathbf{y}) \;\geq\; \sum_{\boldsymbol{\Upsilon}_\varepsilon^m} \mathrm{e}^{-m[H(X)+\varepsilon]} \cdot \mathrm{e}^{-m[H(Y)+\varepsilon]}$$

$$= |\boldsymbol{\Upsilon}_\varepsilon^m| \cdot \mathrm{e}^{-m[H(X)+H(Y)-2\varepsilon]} \geq (1 - \varepsilon) \cdot \mathrm{e}^{m[H(X,Y)-\varepsilon-H(X)-H(Y)-2\varepsilon]}$$

$$= (1 - \varepsilon) \cdot \mathrm{e}^{-m[H(X)+H(Y)-H(X,Y)+3\varepsilon]} \triangleq (1 - \varepsilon) \cdot \mathrm{e}^{-m[T(X;Y)+3\varepsilon]}$$

Tedy pro $\varepsilon << 1$, můžeme psát

$$(1 - \varepsilon) \cdot \mathrm{e}^{-m[T(X;Y)+3\varepsilon]} \;\leq\; P\left[(\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}) \in \boldsymbol{\Upsilon}_\varepsilon^m \right] \;\leq\; \mathrm{e}^{-m[T(X;Y)-3\varepsilon]} \tag{8.54}$$

$$\ln(1 - \varepsilon) - [T(X;Y) + 3\varepsilon] \;\leq\; \frac{\ln P\left[(\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}) \in \boldsymbol{\Upsilon}_\varepsilon^m \right]}{m} \;\leq\; -[T(X;Y) - 3\varepsilon]$$

$$T_\varepsilon^* = [T(X;Y) - 3\varepsilon] \;\leq\; \frac{\ln \left\{ P\left[(\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}) \in \boldsymbol{\Upsilon}_\varepsilon^m \right] \right\}^{-1}}{m} \;\leq\; [T(X;Y) + 3\varepsilon]$$

Pro $0 < \varepsilon << 1$ a $m >> 1$ tedy platí

$$|\boldsymbol{\Upsilon}_\varepsilon^m| \;\approx\; \mathrm{e}^{m[T(X;Y)]} \tag{8.55}$$

Má ale platit rovnost $C_{\mathcal{K}} = \max\{T(X;Y)\} = \max\{\mathcal{R}\}$.

Nechť je nyní $0 < \mathcal{R} < C_{\mathcal{K}}$. Zvolme libovolné rozdělení pravděpodobnosti $p_X(\cdot)$ a vygenerujme podle něj sekvenci $\mathcal{C}$ o počtu $[\mathrm{e}^{m\mathcal{R}}]$ řetězců $\mathbf{x}_w$, každý o délce m. Tato sekvence představuje zdroj zpráv střední hodnota

$$\boldsymbol{\theta} = \left[\{\mathbf{x}_w\}_{w=1}^{[\mathrm{e}^{m\mathcal{R}}]},\ p_{\boldsymbol{\theta}}(\cdot) = \frac{1}{[\mathrm{e}^{m\mathcal{R}}]}\right] \tag{8.56}$$

Pravděpodobnost vygenerování sekvence $\mathcal{C}$ je

$$P(\mathcal{C}) = \prod_{w=1}^{[\mathrm{e}^{m\mathcal{R}}]} \prod_{i=1}^{m} p_X[\boldsymbol{\theta}_i(w)] \tag{8.57}$$

Nechť $P^m_{\mathrm{err}}(\mathcal{C})$ je průměrná pravděpodobnost chyby při přenosu takto vygenerované sekvence $\mathcal{C}$. Pro její střední hodnotu platí

$$\begin{aligned} E[P^m_{\mathrm{err}}(\mathcal{C})] &= \sum_{\{\mathcal{C}\}} P(\mathcal{C}) P^m_{\mathrm{err}}(\mathcal{C}) \qquad (8.58)\\ &= \sum_{\{\mathcal{C}\}} P(\mathcal{C}) \sum_{w=1}^{[\mathrm{e}^{m\mathcal{R}}]} \frac{1}{[\mathrm{e}^{m\mathcal{R}}]} \cdot \lambda_{\mathcal{C}}(\mathbf{x}_w) = \sum_{\{\mathcal{C}\}} P(\mathcal{C}) \cdot \lambda_{\mathcal{C}}(\mathbf{x}_1) = \lambda_{\mathcal{C}}(\mathbf{x}_1) \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} \lambda_{\mathcal{C}}(\mathbf{x}_1) &= P\{[d_m(\boldsymbol{\alpha}) \neq \mathbf{x}_1]\,|\boldsymbol{\theta} = \mathbf{x}_1\}\\ P^m_{\mathrm{err}}(\mathcal{C}) &= \frac{1}{m} \cdot \sum_{w=1}^{m} \lambda_{\mathcal{C}}(\mathbf{x}_1) = \frac{1}{m} \cdot \sum_{w=1}^{m} P\{[d_m(\boldsymbol{\alpha}) \neq \mathbf{x}_1]\,|\boldsymbol{\theta} = \mathbf{x}_1\} =\\ &= P\{(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) \in \boldsymbol{\Upsilon}^m_\varepsilon\,|\mathbf{x}_1\} \end{aligned}$$

Pro $M >> 1$ lze psát

$$\begin{aligned} E[P^m_{\mathrm{err}}(\mathcal{C})] &= P\,[\boldsymbol{\Upsilon}^m_\varepsilon] \leq \sum_{w=1}^{[\mathrm{e}^{m\mathcal{R}}]} \mathrm{e}^{-m[T(X;Y)-3\varepsilon]} \approx \qquad (8.59)\\ &\approx \sum_{w=1}^{\mathrm{e}^{m\mathcal{R}}} \mathrm{e}^{-m[T(X;Y)-3\varepsilon]} = \mathrm{e}^{m\mathcal{R}} \mathrm{e}^{-m[T(X;Y)-3\varepsilon]} = \mathrm{e}^{3M\varepsilon} \mathrm{e}^{-m[T(X;Y)-\mathcal{R}]} \end{aligned}$$

Protože $E[P^m_{\mathrm{err}}(\mathcal{C})] < 1$, lze psát

$$\begin{aligned} 3\varepsilon - T(X;Y) + \mathcal{R} &< 0 \qquad (8.60)\\ \mathcal{R} < T(X;Y) - 3\varepsilon, &\quad \text{resp.} \quad T(X;Y) - \mathcal{R} > 3\varepsilon \end{aligned}$$

Protože $\max\{T(X;Y)\} = C_{\mathcal{K}}$, máme

$$\mathcal{R} < C_{\mathcal{K}} \tag{8.61}$$

a tedy *platí, že pro jistá* $\varepsilon > 0$ *existuje (alespoň jeden)* $(m, \mathcal{M}, \varepsilon)$*-kód přenositelný kanálem* $\mathcal{K}$.
Nechť nyní je $\mathcal{R} \geq C_{\mathcal{K}}$. Je zřejmé, že

$$P^m_{\text{err}}(\mathcal{C}) \leq \frac{H(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\alpha}) + 1}{H(\boldsymbol{\theta})} \tag{8.62}$$

Potom pro $H(\boldsymbol{\theta}) = H(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\alpha}) + T(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{\alpha})$ píšeme,

$$\begin{aligned} \frac{H(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\alpha})}{H(\boldsymbol{\theta})} + \frac{T(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{\alpha})}{H(\boldsymbol{\theta})} &= 1 \leq \frac{H(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\alpha}) + 1}{H(\boldsymbol{\theta})} + \frac{MC_{\mathcal{K}}}{H(\boldsymbol{\theta})} \\ M\mathcal{R} &\leq P^m_{\text{err}}(\mathcal{C}) \cdot m\mathcal{R} + 1 + MC_{\mathcal{K}} \\ P^m_{\text{err}}(\mathcal{C}) &\geq 1 - \frac{1}{m\mathcal{R}} - \frac{C_{\mathcal{K}}}{\mathcal{R}} \rightarrow 1, \ \ \mathcal{R} \rightarrow \infty \end{aligned} \tag{8.63}$$

V tomto pípadě nelze stlačovat pravděpodobnost chyby přenosu libovolně k 0.
Pokud $m = 1$, píšeme

$$\begin{aligned} 1 &\leq \frac{H(X|Y) + 1}{H(X)} + \frac{C_{\mathcal{K}}}{H(X)} \\ H(X) &\leq P_{\text{err}} \cdot H(X) + 1 + C_{\mathcal{K}} \\ P_{\text{err}} &\geq 1 - \frac{1}{H(X)} - \frac{C_{\mathcal{K}}}{H(X)} \rightarrow 1, \ \ H(X) > C_{\mathcal{K}}, \ H(X) \rightarrow \infty \end{aligned} \tag{8.64}$$

Také lze psát

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{H(X) - H(X|Y)}{H(X)} &\leq \frac{1 + C_{\mathcal{K}}}{H(X)} \rightarrow 0, \ \ H(X) > C_{\mathcal{K}}, \ H(X) \rightarrow \infty \\ \frac{H(X|Y)}{H(X)} &= P_{\text{err}} \triangleq \beta \rightarrow 1 \end{aligned} \tag{8.65}$$

V našem speciálním případě vratného přenosu, 'přímo a vratně carnotizovaného', máme $C_{\mathcal{K}} = T(X; Y) < H(X)$.

8.6 Caratheodoryho formulace II. hl. věty termodynamické

8.6.1 Pfaffovy lineární diferenciální formy

Tyto formy jsou výrazy typu

$$\delta\mathcal{Q} = \sum_{i=1}^{n} X_i \, \mathrm{d}x_i \tag{8.66}$$

kde δq může a nemusí být *totálním* diferenciálem a X_i jsou funkce n proměnných x_i, i = 1, …, n,

$$X_i = X_i[(x_i)_{i=1}^n] \triangleq X_i(\mathbf{x}) \tag{8.67}$$

Forma (8.66) může být *holonomní*, nebo *anholonomní*.

Je-li forma (8.66) *holonomní*, je buď již sama totálním diferenciálem [potenciálu vektorového pole $\mathbf{X} = (X_i)_{i=1}^n$], nebo je na totální diferenciál (potenciálu jistého vektorového pole) převoditelná. Tedy $\delta\mathcal{Q} \stackrel{\triangle}{=} \mathrm{d}\mathcal{Q}$, nebo $\delta\mathcal{Q} \stackrel{\triangle}{=} \partial\mathcal{Q}$. Tento převod se provádí jejím vynásobením *integračním faktorem* $f = f(\mathbf{x})$. Integrační faktor lze v případě holonomních Pfaffových lineárních diferenciálních forem nalézt vždy.

Je-li (8.66) *anholonomní*, je výraz $\delta\mathcal{Q}$ parciálním diferenciálem, $\delta\mathcal{Q} \stackrel{\triangle}{=} \partial\mathcal{Q}$, a integrační faktor f nalézt nelze. Dále se budeme zabývat jen formami holonomními.

8.6.2 Holonomní formy

Nechť $\mathcal{R}$ je stavová funkce (n proměnných) určitého termodynamického rovnovážného systému $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}\left[(x_i)_{i=1}^n\right] \tag{8.68}$$

a nechť její totální diferenciál je

$$\mathrm{d}\mathcal{R} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial x_i}\mathrm{d}\boldsymbol{x}_i \tag{8.69}$$

i) Uvažujme nejprve, že $\delta\mathcal{Q} \stackrel{\triangle}{=} \mathrm{d}\mathcal{Q}$, a položme $\mathrm{d}\mathcal{Q} = \mathrm{d}\mathcal{S}$. Potom

$$\sum_{i=1}^n X_i \mathrm{d}x_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial x_i}\mathrm{d}\boldsymbol{x}_i \tag{8.70}$$

a tedy

$$X_i = \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial x_i}, \quad i = 1,\ ...,\ n \tag{8.71}$$

O funkci $\mathcal{R}$ předpokládáme, že platí

$$\frac{\partial^2\mathcal{R}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2\mathcal{R}}{\partial x_j \partial x_i} \tag{8.72}$$

a tedy že platí

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_j} = \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \tag{8.73}$$

Zapišme nyní tzv. *Pfaffovu* (též *exaktní, totální*) diferenciální rovnici

$$\mathrm{d}\mathcal{Q} = \sum_{i=1}^n X_i \mathrm{d}x_i = 0, \ \text{resp.} \quad \mathrm{d}\mathcal{R} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i = 0 \tag{8.74}$$

Integrováním vztahu (8.74) získáváme rovnici nadplochy (*rodiny* nadploch, pro množinu různých kostant) v R^n,

$$\mathcal{R}[(x_i)_{i=1}^n] = \text{konst} \tag{8.75}$$

Plochy rodiny nadploch se neprotínají, každým bodem prostoru R^n prochází vždy právě jedna plocha.

ii) Uvažujme nyní případ, že $\delta Q \triangleq \partial Q$

$$\delta Q = v[(x_i)_i^n]\mathrm{d}\mathcal{R} \tag{8.76}$$

Za předpokladu (8.76) platí nutná a postačující podmínka pro nalezení *integračního faktoru* $[(v[(x_i)_i^n])^{-1}]$,

$$(\mathbf{X}*)\cdot(\mathrm{rot}\mathbf{X}*) = 0 \tag{8.77}$$

kde $\mathbf{X}* \triangleq (X_i,\ X_j,\ X_k),\quad i,j,k = 1,\ ...,\ n.$

Důkaz: Derivujme následující vztahy

$$X_i = v\cdot\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial x_i},\quad X_j = v\cdot\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial x_j},\quad X_k = v\cdot\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial x_k} \tag{8.78}$$

každý z nich podle dvou v nich neuvedených proměnných:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial X_i}{\partial x_j} &= \frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial x_i} + v\frac{\partial^2\mathcal{R}}{\partial x_j\partial x_i}\\
\frac{\partial X_i}{\partial x_k} &= \frac{\partial v}{\partial x_k}\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial x_i} + v\frac{\partial^2\mathcal{R}}{\partial x_k\partial x_i}\\
\frac{\partial X_j}{\partial x_i} &= \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial x_j} + v\frac{\partial^2\mathcal{R}}{\partial x_i\partial x_j}\\
\frac{\partial X_j}{\partial x_k} &= \frac{\partial v}{\partial x_k}\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial x_i} + v\frac{\partial^2\mathcal{R}}{\partial x_k\partial x_j}\\
\frac{\partial X_k}{\partial x_i} &= \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial x_k} + v\frac{\partial^2\mathcal{R}}{\partial x_i\partial x_k}\\
\frac{\partial X_i}{\partial x_k} &= \frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial x_k} + v\frac{\partial^2\mathcal{R}}{\partial x_j\partial x_k}
\end{aligned} \tag{8.79}$$

Z rovnic (8.79) získáváme

$$\begin{aligned}
\frac{\partial X_j}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_j} &= \frac{\partial v}{\partial x_k}\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial x_j} + v\frac{\partial^2\mathcal{R}}{\partial x_k\partial x_j} - \frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial x_k} - v\frac{\partial^2\mathcal{R}}{\partial x_j\partial x_k} = \\
&= \frac{\partial v}{\partial x_k}\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial x_j} - \frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial x_k}
\end{aligned} \tag{8.80}$$

a dále obdobně

$$\begin{aligned}
\frac{\partial X_k}{\partial x_j} - \frac{\partial X_i}{\partial x_k} &= \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial x_k} - \frac{\partial v}{\partial x_k}\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial x_i},\\
\frac{\partial X_i}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_i} &= \frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial x_j} - \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial x_j}
\end{aligned}$$

Protože $X_i = \dfrac{\partial \mathcal{R}}{\partial x_i}$, $i = 1, \ ..., \ n$, podle vztahů (8.79) lze psát

$$\begin{aligned} X_i \left(\frac{\partial X_j}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_j} \right) &= v \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_k} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x_j} - v \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x_k} \\ X_j \left(\frac{\partial X_k}{\partial x_i} - \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \right) &= v \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x_k} - v \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_k} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x_i} \\ X_k \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \right) &= v \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x_i} - v \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x_j} \end{aligned} \tag{8.81}$$

a součtem rovnic (8.81) získáváme dokazovaný vztah (8.77).

Nyní dokážeme, že vztah (8.77) je i podmínka postačující; je-li splněna je možno převést parciální diferenciál ∂Q na totální diferenciál $\mathrm{d}\mathcal{R}$ tak, že

$$\mathrm{d}\mathcal{R} = \frac{1}{v[(x_i)_{i=1}^n]} \partial Q \tag{8.82}$$

Nejprve se věnujme Pfaffově rovnici o dvou proměnných.

$$\mathrm{d}Q = \sum_{i=1}^{2} X_i \mathrm{dx_i} = 0 \tag{8.83}$$

Lze psát vždy řešitelnou diferenciální rovnici prvního řádu

$$\frac{\mathrm{dx_2}}{\mathrm{dx_2}} = -\frac{X_1}{X_2} \tag{8.84}$$

s řešením

$$\mathcal{R}(x_1, x_2) = \mathrm{konst} \tag{8.85}$$

Diferencováním (8.85) získáváme

$$\mathrm{d}\mathcal{R} = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i = 0 \tag{8.86}$$

a odtud

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = -\frac{\dfrac{\partial \mathcal{R}}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial \mathcal{R}}{\partial x_i}} = \frac{X_1}{X_2} \tag{8.87}$$

resp.

$$\frac{\dfrac{\partial \mathcal{R}}{\partial x_1}}{X_1} = \frac{\dfrac{\partial \mathcal{R}}{\partial x_2}}{X_2} = \frac{1}{v(x_1, x_2)} \tag{8.88}$$

Spojením vztahů (8.88) a (8.86) získáme

$$d\mathcal{R} = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{v} X_i dx_i = \frac{1}{v} \partial Q \tag{8.89}$$

Je tedy zřejmé, že pro $n = 2$ je Pfaffova forma vždy holonomní, lze pro ni vždy nalézt integrační faktor $v(\cdot,\cdot) \neq 0$.

Uvažujme nyní obecný případ hodnoty n. Nechť

$$\delta Q = \sum_{i=1}^{n-2} X_i dx_i + X_{n-1} dx_{n-1} + X_n dx_n \tag{8.90}$$

Pro konstantní $x_i,\ i = 1,\ ...,\ n-2$ má rovnost (8.90) tvar

$$\delta Q = X_{n-1} dx_{n-1} + X_n dx_n \tag{8.91}$$

Forma (8.91) je holonomní forma dvou proměnných, a tudíž je *integrabilní* (existuje k ní integrační faktor). Potom existují funkce $v(x_{n-1}, x_n)$ a $\mathcal{Z}(x_{n-1}, x_n)$ tak, že

$$X_{n-1} dx_{n-1} + X_n dx_n = v d\mathcal{Z}(x_{n-1}, x_n) \tag{8.92}$$

Potom ovšem

$$d\mathcal{Z}(x_{n-1}, x_n) = d\mathcal{Z}(x_1,\ ...,\ x_n) - \sum_{i=1}^{n-2} \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial x_i} dx_i \tag{8.93}$$

Rovnici (8.92) pak lze zapsat ve tvaru

$$X_{n-1} dx_{n-1} + X_n dx_n = v \left[d\mathcal{Z} - \sum_{i=1}^{n-2} \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial x_i} dx_i \right] \tag{8.94}$$

a dosazením do (8.90) získáváme

$$\sum_{i=1}^{n-2} X_i dx_i + v d\mathcal{Z} - v \sum_{i=1}^{n-2} \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial x_i} dx_i = 0 \tag{8.95}$$

a po úpravě

$$\sum_{i=1}^{n-2} \left[\frac{X_i}{v} - \left(\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial x_i} \right) \right] dx_i + d\mathcal{Z} = 0 \tag{8.96}$$

Zaveďme nové proměnné $y_i,\ i = 1,\ ...,\ n$ tak, že

$$y_i = x_i,\ i = 1,\ ...,\ n-2, n \text{ a } y_{n-1} = \mathcal{Z}(x_1,\ ...,\ x_n) \tag{8.97}$$

a zaveďme ještě označení

$$Y_i \triangleq \sum_{i=1}^{n-2} \left[\frac{X_i}{v} - \left(\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial x_i} \right) \right] \tag{8.98}$$

kde

$$Y_i = Y_i[(y_i)_{i=1}^n], \quad i = 1, \ ..., \ n-2 \tag{8.99}$$

Rovnici (8.96) pak lze přepsat na tvar

$$\sum_{i=1}^{n-2} Y_i \mathrm{d}y_i + \mathrm{d}y_{n-1} \ = \ 0 \tag{8.100}$$

resp. na
$$\sum_{i=1}^{n} Y_i \mathrm{d}y_i \ = \ 0, \ \text{kde } Y_{n-1} = 1, \ Y_n = 0$$

Poslední rovnice vznikla z (8.96) algebraickou substitucí, a proto z integrovatelnosti formy $\sum_{i=1}^{n} X_i \mathrm{d}x_i$ plyne i integrovatelnost formy $\sum_{i=1}^{n} Y_i \mathrm{d}y_i$. Potom, podle (8.77) musí pro $\mathbf{Y}* = (Y_i, Y_j, Y_k)$ platit $(\mathbf{Y}*) \cdot (\mathrm{rot}\mathbf{Y}*) = 0$, tedy,

$$Y_i \left(\frac{\partial Y_j}{\partial y_k} - \frac{\partial Y_k}{\partial y_j} \right) + Y_j \left(\frac{\partial Y_k}{\partial y_i} - \frac{\partial Y_i}{\partial y_k} \right) + Y_k \left(\frac{\partial Y_i}{\partial y_j} - \frac{\partial Y_j}{\partial y_i} \right) = 0 \tag{8.101}$$

Pro případ, že $j = n-1, \ k = n$ a s ohledem na rovnosti v (8.100), platí

$$Y_i \left(0 - 0\right) + 1 \left(0 - \frac{\partial Y_i}{\partial y_n} \right) + 0 \left(\frac{\partial Y_i}{\partial y_{n-1}} - \frac{\partial Y_{n-1}}{\partial y_n} \right) = 0 \tag{8.102}$$

a tedy

$$\frac{\partial Y_i}{\partial y_n} = 0, \ i = 1, \ ..., \ n \tag{8.103}$$

Ze vztahu (8.103) plyne, že Y_i nezávisí na y_n. Lineární forma v (8.100) má $n-1$ nezávisle proměnných.

Předchozí postup opakujeme tak dlouho, až zbudou pouze dvě proměnné. Pfaffova lineární diferenciální forma nezávisle proměnných je vždy integrovatelná.

Podmínka (8.77) je tedy nutnou a postačující podmínkou holonomnosti Pfaffovy formy $\delta Q = \sum_{i=1}^{n} X_i \mathrm{d}x_i$.

Nechť forma $\delta Q = \sum_{i=1}^{n} X_i \mathrm{d}x_i$ má integrační faktor v a nechť $\mathrm{d}\mathcal{R} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{v} X_i \mathrm{d}x_i$. Pfaffova rovnice $\delta Q = \sum_{i=1}^{n} X_i \mathrm{d}x_i = 0$ má pak řešení tvaru $\mathcal{R}(x_1, \ ..., \ x_k) = \text{konst.}$ Toto řešení představuje rodinu nadploch v n-rozměrném prostoru, nikde se neptotínajících.

Zvolme bod $P(x_1^0, \ ..., \ x_n^0)$ určený volbou konst $= C$. Pouze body ležící na nadploše $\mathcal{R}(x_1^0, \ ..., \ x_n^0)$ jsou z bodu P dosažitelné po cestě splňující podmínku $\mathrm{d}Q = 0$. Všechny body ležící mimo tuto nadplochu jsou z bodu P nedosažitelné po cestě splňující podmínku $\mathrm{d}Q = 0$.

Dokázali jsme tak *první Caratheodoryho větu.*

8.6.3 Caratheodoryho věty

První *Caratheodoryho* věta říká:
Má-li Pfaffova forma $\delta Q = \sum_{i=1}^{n} X_i \mathrm{d}x_i$ *integrační faktor, existují v libovolné blízkosti libovolně pevně zvoleného bodu* P *body, jichž z tohoto bodu* P *nelze dosáhnout po cestě vyhovující rovnici* $\mathrm{d}Q = 0$*.*

Druhá *Caratheodoryho* věta říká:
Má-li Pfaffova forma $\delta Q = \sum_{i=1}^{n} X_i \mathrm{d}x_i$*, kde* X_i *jsou funkce* n *proměnných, spojitě diferencovatelné na jednoduše souvislé oblasti, tu vlastnost, že v libovolné blízkosti libovolně pevně zvoleného bodu* $P \in \mathcal{R}$ *existují body, jichž z* P *nelze dosáhnout po cestě vyhovující rovnici* $\mathrm{d}Q = 0$*, je tato forma holonomní; lze pro ni nalézt integrační faktor.*

Důkaz druhé Caratheodoryho věty: Zvolme bod v ležící v nadrovině

$$X_i = X_i(u, v) \tag{8.104}$$

ležicí blízko bodu $P \in \mathcal{R}$ tak, že z bodu V není dosažitelný po cestě $\mathrm{d}Q = 0$. Nechť g je přímka procházející bodem P a nechť g jde takovým směrem, že nesplůje podmínku $\mathrm{d}Q = 0$. Bodem V vedeme přímku g' a uvažujeme křivku k procházející bodem $V(u_0, v_0)$. Na křivce k platí $\mathrm{d}Q = 0$. Tato křivka je pro bod $V(u_0, v_0)$ jediná. Leží ve zmíněné rovině, a proto pro ni platí

$$\mathrm{d}X_i = \frac{\partial X_i}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial X_i}{\partial v}\mathrm{d}v, \quad i = 1, \ ..., \ n \tag{8.105}$$

a ve spojení s $\mathrm{d}Q = 0$ získáváme

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial X_i}{\partial u}\mathrm{d}u + \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial X_i}{\partial v}\mathrm{d}v = 0 \tag{8.106}$$

Tato křivka protíná přímku g v bodu R. Ten je z bodu P po cestě $\mathrm{d}Q = 0$ nedosažitelný. Jinak by byl z P dosažitelný i V a to je ve sporu s naším předpokladem. Vhodnou volbou V lze docílit toho, že R je libovolně blízko P. Tedy v libovolné blízkosti bodu P existují body, jichž nelze dosáhnout po cestě (křivce) $\mathrm{d}Q = 0$.

Zvolme nyní přímku g' rovnoběžnou s g a oběma proložme válcovou plochu C. Uvažujme nyní, že křivka k, splňující rovnost $\mathrm{d}Q = 0$, leží na této ploše a protíná g' v bodě M.
Proložme nyní jinou válcovou plochu C' přímkami g' a g (jako pokračování C). Pokračování k v c' označme k'. Křivka k' protíná g v bodě N a ten musí splývat s P. Jinak by bylo možno deformovat C' až do C a tak by bon N mohl přejíit do bodu P. V době, kdy by P a N nesplývaly, by bylo možno dosáhnout P z N po g. Ale tam neplatí $\mathrm{d}Q = 0$. Pokud deformujeme C' až do C, uzavřou k a k' plochu,

kde $\mathrm{d}Q = 0$. Má-li tato plocha rovnici $\mathcal{R}[(x_i)_{i=1}^n]$, má i rovnice $\mathrm{d}Q = 0$ řešení; pro Pfaffovu formu $\delta Q = \sum_{i=1}^{n} X_i \mathrm{d}x_i$ lze nalézt integrační faktor.
Dokážeme, že existuje-li jeden integrační faktor, existuje jich nekonečně mnoho.
Nechť

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}\{\mathcal{R}[(x_i)_{i=1}^n]\} \tag{8.107}$$

je prostou funkcí $\mathcal{R}$. Potom lze psát

$$\mathrm{d}\mathcal{S} = \frac{\mathrm{d}\mathcal{S}}{\mathrm{d}\mathcal{R}}\mathrm{d}\mathcal{R} = \frac{\mathrm{d}\mathcal{S}}{\mathrm{d}\mathcal{R}}\frac{1}{v}\mathrm{d}\mathcal{Q} \tag{8.108}$$

Definujme nyní

$$\vartheta[(x_i)_{i=1}^n] = v[(x_i)_{i=1}^n]\frac{\mathrm{d}\mathcal{R}}{\mathrm{d}\mathcal{S}} \tag{8.109}$$

Pak

$$\mathrm{d}\mathcal{S} = \frac{1}{\vartheta}\mathrm{d}\mathcal{Q} \tag{8.110}$$

Výraz $\frac{1}{\vartheta}$ je integračním faktorem převádějícím neúplný (parciální) diferenciál $\delta\mathcal{Q}$ na úplný (totální) $\mathrm{d}\mathcal{S}$.

8.6.4 Reciproká termodynamická teplota jako integrační faktor

Uvažujme rovnovážný termodynamický systém $\mathcal{A}$ složený ze dvou částí, $\mathcal{A}_1$ a $\mathcal{A}_2$ (které jsou v tepelném kontaktu). Celý systém má teplotu Θ a každá část $\mathcal{A}_1$ a $\mathcal{A}_2$ je charakterizována svým parametrem $\mathcal{R}_1$ a $\mathcal{R}_2$. Celek $\mathcal{A}$ pak charakterizuje parametr $\mathcal{R}$.
Pro dodané teplo δQ podle I. hlavní věty termodynamické platí

$$\delta Q = \delta Q_1 + \delta Q_2 = v\mathrm{d}\mathcal{R}, \ \text{kde} \ \ \delta Q_1 v_1 = \mathrm{d}\mathcal{R}_1, \ \ \delta Q_1 v_1 = \mathrm{d}\mathcal{R}_1 \tag{8.111}$$

Pro veličiny $v, \ v_1, \ v_1$ a $\mathcal{R}$ platí

$$v = v(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \Theta), \ \ v_1 = v_1(\mathcal{R}_1, \Theta), \ \ v_2 = v_2(\mathcal{R}_2, \Theta), \ \ \mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \Theta) \tag{8.112}$$

Potom lze psát

$$\mathrm{d}\mathcal{R} = \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\mathcal{R}_1}\mathrm{d}\mathcal{R}_1 + \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\mathcal{R}_2}\mathrm{d}\mathcal{R}_2 + \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\Theta}\mathrm{d}\Theta \tag{8.113}$$

Ze vztahů (8.111) a (8.112) vyplývá, že

$$\begin{aligned} v\mathrm{d}\mathcal{R} &= v_1\mathrm{d}\mathcal{R}_1 + v_2\mathrm{d}\mathcal{R}_2 \\ \mathrm{d}\mathcal{R} &= \frac{v_1}{v}\mathrm{d}\mathcal{R}_1 + \frac{v_2}{v}\mathrm{d}\mathcal{R}_2 \end{aligned} \tag{8.114}$$

Z tohoto vztahu je zřejmé, že pro diatermický (dokonalý tepelný) styk částí $\mathcal{A}_1$ a $\mathcal{A}_1$ ekvilibriálního systému $\mathcal{A}$ platí

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \Theta} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathcal{R}_1} = \frac{v_1}{v}, \quad \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathcal{R}_2} = \frac{v_2}{v} \tag{8.116}$$

Na pořadí derivací v našem případě nezáleží, a tudíž lze psát

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \Theta}\left(\frac{v_1}{v_2}\right) &= \frac{\partial}{\partial \Theta}\left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathcal{R}_1}\right) = \frac{\partial}{\partial \mathcal{R}_1}\left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \Theta}\right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \Theta}\left(\frac{v_2}{v_2}\right) &= \frac{\partial}{\partial \Theta}\left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathcal{R}_2}\right) = \frac{\partial}{\partial \mathcal{R}_2}\left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \Theta}\right) = 0 \end{aligned} \tag{8.117}$$

Rovnice (8.117) derivujeme a po úpravě získáváme

$$\begin{aligned} \frac{1}{v^2}\cdot\left[v\frac{\partial v_1}{\partial \Theta} - v_1\frac{\partial v}{\partial \Theta}\right] &= 0 = \frac{1}{v^2}\cdot\left[v\frac{\partial v_2}{\partial \Theta} - v_2\frac{\partial v}{\partial \Theta}\right] \\ \frac{1}{v_1}\frac{\partial v_1}{\partial \Theta} - \frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial \Theta} &= 0 = \frac{1}{v_2}\frac{\partial v_2}{\partial \Theta} - \frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial \Theta} \end{aligned} \tag{8.118}$$

Potom

$$\frac{\partial \ln v_1}{\partial \Theta} = \frac{\partial \ln v}{\partial \Theta} = \frac{\partial \ln v_2}{\partial \Theta} \tag{8.119}$$

Pro splnění podmíneky(8.119) je třeba, aby platilo

$$v = f(\Theta)\cdot h(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2), \quad v_1 = f(\Theta)\cdot h_1(\mathcal{R}_1), \quad v_2 = f(\Theta)\cdot h_2(\mathcal{R}_2) \tag{8.120}$$

Podle vztahů (8.111) platí

$$\begin{aligned} \delta Q_1 &= f(\Theta)\cdot h_1(\mathcal{R}_1)\mathrm{d}\mathcal{R}_1 \stackrel{\triangle}{=} f(\Theta)\mathrm{d}S_1 \\ \delta Q_2 &= f(\Theta)\cdot h_2(\mathcal{R}_2)\mathrm{d}\mathcal{R}_2 \stackrel{\triangle}{=} f(\Theta)\mathrm{d}S_2 \\ \delta Q &= f(\Theta)\cdot h(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)\mathrm{d}\mathcal{R} \stackrel{\triangle}{=} f(\Theta)\mathrm{d}S \\ &= f(\Theta)\cdot h_1(\mathcal{R}_1)\mathrm{d}\mathcal{R}_1 + f(\Theta)\cdot h_2(\mathcal{R}_2)\mathrm{d}\mathcal{R}_2 \end{aligned} \tag{8.121}$$

Vztahy (8.121) jsou definovány funkce

$$S_1 = S_1(\mathcal{R}_1), \quad S_2 = S_2(\mathcal{R}_2), \quad S = S(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) \tag{8.122}$$

které jsou stavovými funkcemi. Jejich hodnota musí být při adiabatickém (a vratném, izentropickém) ději konstantní. Funkce $f(\Theta)$ je stejná v celém $\mathcal{A}$, Θ je konstantní teplota. Je zřejmé, že $f(\Theta) > 0, \quad \Theta > 0$.

Uvažujme i-tý podsystém $\mathcal{A}_i \quad i = 1, 2$, systému $\mathcal{A}$. Ten nechť je tvořen ideálním plynem. Potom

$$\mathrm{d}U_i + p_i\mathrm{d}V_i = \delta Q_i = p_iV_i\left\{\frac{1}{p_iV_i}\left(\frac{\partial U_i}{\partial \Theta}\right)\mathrm{d}\Theta + \left[\frac{1}{p_iV_i}\left(\frac{\partial U_i}{\partial V_i}\right) + \frac{1}{V_i}\right]\mathrm{d}V_i\right\} \tag{8.123}$$

Uvažujeme-li, že $\dfrac{\partial U_i}{\partial V_i} = 0$ protože části $\mathcal{A}_i$ zaujímají konstantní objemy V_i, při dosazení $pV_i = n_i R\Theta$ píšeme

$$\delta Q_i = n_i R\Theta \left[\frac{1}{p_i V_i}\left(\frac{\partial U_i}{\partial \Theta}\right)\mathrm{d}\Theta + \frac{1}{V_i}\mathrm{d}V_i\right] \tag{8.124}$$

Potom

$$\begin{aligned} \frac{\delta Q_i}{\Theta} &= n_i R\left[\left(\frac{\partial U_i}{\partial \Theta}\right)\frac{\mathrm{d}\Theta}{\Theta} + \frac{1}{V_i}\mathrm{d}V_i\right] = n_i R{\cdot}c_v\frac{\mathrm{d}\Theta}{\Theta} + n_i R\cdot\frac{\mathrm{d}V_i}{V_i} \\ &= n_i R{\cdot}c_v.\mathrm{d}\ln\Theta + n_i R\cdot\mathrm{d}\ln V_i \triangleq \mathrm{d}S_i^{Claus}, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \tag{8.125}$$

Podle (8.121) je náš postup univerzální a funkce $f(\Theta)$ má také univerzální charakter. Tedy obecně platí

$$\mathrm{d}S_{\mathrm{Claus}} = \frac{\delta Q}{\Theta} \tag{8.126}$$

Integračním faktorem pro parciální diferenciál δQ tepla Q, převádějící jej na diferenciál totální $\mathrm{d}S_{\mathrm{Claus}}$ je tedy reciproká termodynamická teplota Θ^{-1}.
Samotná teplota Θ je intenzitou tepelné energie Q a entropie S_{Claus} je její extenzitou.

9. Závěr

V Úvodu jsem stručně uvedl cíle i výsledky koncepčního pohledu, který jsem nazval *Informační termodynamika*. Ty jsou navíc uvedeny na konci každé relevantní kapitoly a oddílu. Nebudeme je zde tedy opakovat, ale *volně* se zamyslíme nad možnou aplikací těchto výsledků v *biologii*. Chci zdůraznit, že uvedené úvahy jsou pouze velmi volné *hypotézy* analogického a funkčního typu.

O principiální ztrátě informace lze uvažovat i při buněčném dělení. Při každém dělení buňky (z *předchůdce* vzniká *následovník*) dochází ke zkreslení *duplikované*, kopírované struktury rodičovské buňky, měřitelné veličinou (průměrné) informační množství. Jedná se o ztrátu části přenášené, kopírované zprávy, ztrátu informace při přenosu zprávy. Zprávou (informací) je zde celá buněčná struktura, včetně 'programu' jejího fungování.
V důsledku generování stále méně přesné struktury při dalším a dalším kopírování (dělení) buněk organismus jakožto souhrn buněk 'stárne zubem času' - ztrátou *strukturovanosti*, přesnosti stavby následovnických buněk (v důsledku toho jejich vnitřních i vnějších vazeb). Pojmem strukturovanost objektu (zprávy, buňky) rozumíme toto: objekt je tím strukturovanější, čím větší množství informace obsahuje, čím je složitější, čím více vzájemně provázaných částí obsahuje, a také čím méně je jeho stavba či struktura pravděpodobná, čím méně je jako (izolovaný) fyzikální systém stabilní.
Nakonec po celé řadě dělení dochází k neslučitelnosti stavby, struktury poslední buňky (k neslučitelnosti množství informace, které buňka představuje) s tou její minimální strukturovaností (informací), která ji udržuje při schopnosti vnitřní i vnější 'komunikace', tak, že je stále rozpoznávána jako 'ta určitá buňka určitého druhu' - tedy při životě.
Tento mechanismus je funkčně popsatelný naším *přímým* 'carnotovským' modelem přenosu informace. Při každém běhu modelového Carnotova cyklu získáváme na jeho výstupu menší (průměrnou) informaci, než je informace vstupní. Použijeme-li tuto informaci jako vstupní, opět získáme menší hodnotu informace na výstupu atd. Současně každý běh cyklu generuje přírustek entropie celého širšího izolovaného systému, v němž k tomuto přenosu dochází. V tomto případě je to stále menší rozlišitelnost částí celého modelového tepelného stroje - náš model onoho stárnutí 'zubem času'. Hledaný 'gen stárnutí' by pak mohl být jen údajem o přesnosti duplikace, v našem modelu je to účinnost přenosu, transformace vstupní energie.
Je tedy zřejmé, že ztráta takto přenášené informace je vhodným funkčním modelem pro případ bunčného dělení. Tam se stáří následovníka (index pořadí spuštění cyklu) projevuje, signalizuje zkracováním *telomer* [Wen-Chi Hsueh, University of California, San Francisco; *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2007].

Dosud jsme hovořili o běžném chování buněk. Při zhoubném bujení dochází k opačné situaci. Vznikají buňky s přesnou strukturou (zřejmě jistým způsobem jinou než 'normální' buňky svého druhu). Tento růst strukturovanosti v jisté lokalitě celého

organismu je ale zaplacen vysáváním energie z okolí této lokality. Tomuto okolí se pak nedostává energie nutná k jeho normálnímu fungování; je spotřebována na onen lokální růst strukturovanosti signalizovaný tím, ž u následovníků předchůdcovských buněk se jejich telomery prodlužují (buňky jakoby mládnou [Wen-Chi Hsueh]).
Tato situace je opět funkčně popsatelná informačně-termodynamickým modelem, tentokrát *reverzním*. V něm dochází k *lokálnímu* poklesu entropie, a tedy růstu strukturovanosti, rozlišitelnosti takové lokality (v rámci širšího izolovaného systému). K tomuto poklesu entropie, růstu strukturovanosti je ale třeba energie dodávané z okolí takové lokality poklesu entropie, což vede k růstu entropie tohoto okolí i k růstu celkové entropie celého širšího systému - na úkor jeho stále strukturovanější (otevřené) části. V případě buněk vidíme chřadnutí organismu vcelku. Náš reverzní model rovněž opravňuje k očekávání stabilně (mírně) zvýšené teploty pacienta a také nižší teploty problematické tkáně.

Zdá se tedy, že informačně-termodynmický pohled prezentovaný v této práci může dobře vymezit vlastnosti, kvalitu velmi rozličných jevů.

Bohdan Hejna

Rejstřík

Literatura

[1] Ashby, R. W. *Kybernetika*; Orbis: Praha, 1961.

[2] Balda, M.; Hanuš, B.; et al. *Základy technické kybernetiky*; SNTL/ALFA: Praha, 1986.

[3] Ballescu, R. *Equilibrium and Nonequilibrium Statistical Mechanics*; Wiley: New York, 1975.

[4] Bell, D. A. *Teorie informace*; SNTL: Praha, 1961.

[5] Bennett, Ch. H. The thermodynamics of computation – a Review. *Int. J. Theor. Phys.* **1982**, *21* (12), 905–940.

[6] Boublík, T. *Statistická termodynamika*; Academia: Praha, 1996.

[7] Brdička, R.; Dvořák, J. *Základy fysikální chemie*; Academia: Praha, 1977.

[8] Brillouin, L. *Science and Information Theory*; Academia Press: New York, 1963.

[9] Cover, T. M.; Thomas, J. B. *Elements of Information Theory*; Wiley: New York, 1991.

[10] Fabián, F.; Kluiber, Z.; et al. Pojem entropie. *Moderní směry ve fyzice*; ARSCI: Praha, 2003; Chapter 19, p 144.

[11] Gershenfeld, N. Signal entropy and the thermodynamics of computation. *IBM Systems Journal* **1996**, *35* (3/4), 384.

[12] Gněděnko, B. V. *Kurs těorii věrojatnostěj*; Nauka: Moskva, 1965.

[13] Hála, E. *Úvod do chemické termodynamiky*; Academia: Praha, 1975.

[14] Hanitz, F. *Kvantová a statistická fyzika: Přílady*; ČVUT: Praha, 1989.

[15] Hanš, O. *Úvod do teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky*; ČVUT: Praha, 1968.

[16] Havrda, J. *Základy počtu pravděpodobnosti*; ČVUT: Praha, 1972.

[17] Havrda, J. *Teorie informace*; ČVUT: Praha, 1976.

[18] Hašek, O.; Nožička, J. *Technická mechanika pro elektrotechnické obory II.*; SNTL: Praha, 1968.

[19] Hejna, B.; Vajda, I. Information transmission in stationary stochastic systems. *AIP Conf. Proc.* **1999**, *465* (1), 405–418. DOI: 10.1063/1.58272.

[20] Hejna, B. Informační kapacita stacionárních fyzikálních systémů. Doktorská disertační práce, ÚTIA AVČR, FJFI ČVUT, Praha, 2000.

[21] Hejna, B. Generalized Formula of Physical Channel Capacities.*International Journal of Control, Automation, and Systems* **2003**, *15*.

[22] Hejna, B. Tepelný cyklus a přenos informace. *Matematika na vysokých školách: Determinismus a chaos*; JČMF, ČVUT: Praha, 2005; pp 83–87.

[23] Hejna, B. Thermodynamic model of Noise Information Transfer. In *AIP Conference Proceedings*, Computing Anticipatory Systems: CASYS'07 – Eighth International Conference; Dubois, D., Ed.; American Institute of Physics: Melville, New York, 2008; pp 67–75.

[24] Hejna, B. Informační význam Gibbsova paradoxu. *Matematika na vysokých školách: Variační principy*; JČMF, ČVUT: Praha, 2007; pp 25–31.

[25] Hejna, B. Proposed Correction to Capacity Formula for a Wide-Band Photonic Transfer Channel. In *Proceedings of International Conference Automatics and Informatics'08, VII-1 – VIII-4*; Atanasoff, J., Ed.; Society of Automatics and Informatics: Sofia, Bulgaria, 2008.

[26] Hejna, B. Gibbs Paradox as Property of Observation, Proof of II. Principle of Thermodynamics. In *Computing Anticipatory Systems: CASYS'09 - Nineth International Conference*; Dubois, D. M., Ed.; 2009.

[27] Hejzlar, R. *Termodynamika*; ČVUT: Praha, 1998.

[28] von Hippel, A. R. *Molekulová fyzika hmoty*; SNTL: Praha, 1963.

[29] Hoffner, V. *Úvod do teorie signálů*; SNTL: Praha, 1979.

[30] Holevo, A. S. On the capacity of quantum communication channel. *Problems of Information Transmission* **1979**, *15* (4), 3–11.

[31] Horák, Z.; Krupka, F. *Technická fyzika*; SNTL/ALFA: Praha, 1976.

[32] Horák, Z.; Krupka, F. *Technická fysika*; SNTL: Praha, 1961.

[33] Horský, J.; Novotný, J.; Štefaník, M. *Mechanika ve fyzice*; Academia: Praha, 2001.

[34] Jaynes, E. T. Evolution of Carnot's Principle. Reprinted in Ericksen & Smith. **1988**, *1*, 267–282.

[35] Jaynes, E. T. Gibbs vs Boltzmann Entropies. *Am. J. Phys.* **1965**, *33* (5), 391–398.

[36] Jaynes, E. T.; Smith, C. R.; Ericksen, G. J.; Neudorfer, P. O. The Gibbs Paradox. *Kluwer Academic Publishers* **1992**, 1–22.

[37] Jaynes, E. T. Information Theory and Statistical Mechanics. *Physical Review* **1957**, *106* (4), 620–630.

[38] Kalčík, J.; Sýkora, K. *Technická termomechanika*; Academia: Praha, 1973.

[39] Košťál, K. *Statistická fyzika: Vybrané partie*; ČVUT: Praha, 1973.

[40] Kvasnica, J. *Termodynamika*; SNTL: Praha, 1965.

[41] Kvasnica, J. *Statistická fyzika*; Academia: Praha, 1983.

[42] Kvasnica, J. *Mechanika*; SNTL: Praha, 1988.

[43] Kvasnica, J. *Matematický aparát fyziky*; Academia: Praha, 1997.

[44] Kotek, Z.; Vysoký, P.; Zdráhal, Z. *Kybernetika*; SNTL: Praha, 1990.

[45] Kotek, Z.; Vysoký, P.; Zdráhal, Z. *Kybernetika*; ČVUT: Praha, 1987.

[46] Kracík, J.; Kalivoda, L.; Maloch, J. *Kvantová a statistická fyzika*; ČVUT: Praha, 1988.

[47] Landau, L. D.; Lifschitz, E. M. *Statistical Physics*, 2nd ed.; Pergamon Press: Oxford, 1969.

[48] Landauer, M. Irreversibility and Heat Generation in the Computing Process.*IBM J. Res. Dev.* **2000**, *44* (1/2).

[49] Lavenda, B. H. *Statistical Physics*; Wiley: New York, 1991.

[50] Lebedev, D. L.; Levitin, L. B. Information transmission by electromagnetic field. *Information and Control* **1966**, *9*, 1–22.

[51] Leech, J. W. *Klasická mechanika*; SNTL: Praha, 1970.

[52] Madelung, E. *Príručka matematiky pre fyzikov*; Alfa: Bratislava, 1975.

[53] Marvan, M. *Záporné termodynamické teploty a nové základy termodynamiky*; SNTL: Praha, 1965.

[54] Maršík, F.; Dvořák, I. *Biotermodynamika*; Academia: Praha, 1998.

[55] Maršík, F. *Termodynamika kontinua*; Academia: Praha, 1999.

[56] Maršák, Z. *Termodynamika a statistická fyzika*; ČVUT: Praha, 1995.

[57] Moore, W. J. *Fyzikální chemie*; SNTL: Praha, 1981.

[58] Novotná H., Cais S., Ptáček M. *Teoretická mechanika*; SNTL/ALFA: Praha, 1983.

[59] Prchal, J. *Signály a soustavy*; SNTL/ALFA: Praha, 1987.

[60] Rao, R. C. *Lineární metody statistické indukce a jejich aplikace*; Academia: Praha, 1978.

[61] Rényi, A. *Teorie pravděpodobnosti*; Academia: Praha, 1972.

[62] Rényi, A. *A Diary on Information Theory*; Akadémiai Kiadó: Budapest, 1984.

[63] Samohýl, I. *Racionální termodynamika chemicky reagujících směsí*; Academia: Praha, 1982.

[64] Shannon, C. E. A mathematical theory of communication. *The Bell Systems Technical Journal* **1948**, *27*, 379–423, 623–656.

[65] Schumacher, B. *Entropy, Complexity, and Computation*; Natural science colloquium, Kenyon College, 1989.

[66] Silin, V. P. *Úvod do kinetické teorie plynů*; Academia: Praha, 1971.

[67] Slavík, J. B.; et al. *Základy fysiky I*; Academia: Praha, 1961.

[68] Svoboda, E.; Bakule, R. *Molekulová fyzika*; Academia: Praha, 1992.

[69] Vajda, I. *Teória informácie a štatistického rozhodovania*; Alfa: Bratislava, 1982.

[70] Vajda, I. *Teorie informace*; ČVUT: Praha, 2004.

[71] Vodák, F. *Termomechanika spojitého prostředí*; ČVUT: Praha, 1992.

[72] Watanabe, S. *Knowing and Guessing*; Wiley: New York, 1969.

[73] Wiener, N. *Kybernetika*; SNTL: Praha, 1960.

[74] Wiener, N. *Kybernetika a společnost*; Československá akademie věd: Praha, 1963.

Abstract

We apply a certain unifying physical description of the results of Information Theory. Assuming that heat entropy is a thermodynamic realization of information entropy, we construct a cyclical, thermodynamic, average-value model of an information transfer chain as a general heat engine, in particular a Carnot engine, reversible ar irreversible.

A working medium of the cycle (a thermodynamic system transforming input heat energy) can be considered as a thermodynamic, average-value model or, as such, as a realization of an information transfer channel. We show that for a model realized in this way the extended II. Principle of Thermodynamics is valid and we formulate its information form.

Our thermodynamic-information derivation based on a heat cycle demonstrates that it is impossible, in such a type of channel, for the bound information contained in an input message to be transferred without its (average) loss, even when the ideal case of a noiseless channel is considered. This loss of information is the necessary condition for such a repeatable transfer of messages. Such information transfer can be worsened only by heat dissipation of energies, which means by a noise heat generated by irreversible processes in the channel, subtractive in this case. This channel is described as a transformer of input heat, which has non-ideal properties (inner friction).

Also we solve the problem of a proof of II. Principle of Thermodynamics. We state the relation between the term of information entropy, introduced by C. Shannon (1948), and thermodynamic entropy, introduced by R. Clausius (1850) and, further, explain Gibbs paradox. Our way to explain Gibbs paradox and to a proof of II. Principle of Thermodynamics is then based on the term of bound information, and, is identical with an introducing of Boltzmann function of statistical physics. Its negative value, determined by detailness of our description of an observed system, is prooved to be a value of Clausius entropy (on a certain substitute equivalent equilibrial thermodynamic way).

We show that physical realization of such an observation is equivalent with a scheme of a relevant (reversible) heat cycle described informationally. Its properties are expressible in terms of Gibbs paradox and vice versa.

Further, we introduce bound information entropies on a system of stochastic quantities realized physically; their values and expectation values are (changes of) energies; these, reduced by temperature, give (changes of) thermodynamic entropies. Bound entropies of our realized observation, input, output and conditional are, as those free ones, associted by channel equation. This equation is, in this sense, an information description of a cyclical transformation of heat energy of an observed, measured system. From this equation, especially, from its derivation, understood this way, the original formulations of II. Principle of Thermodynamics follow. It is a most general formulation of II. Principle of Thermodynamics yieling in our Equivalence Principle of Thermodynamics (the equivalence of I., II., III. Principle of Thermodynamics).

Key words: Carnot cycle, I., II., III. Principle of Thermodynamics, Heat entropy, Observation, Information entropy, Transfer channel, Transinformation, Noise.

Ing. Bohdan Hejna, Ph.D.

INFORMAČNÍ TERMODYNAMIKA I.
Rovnovážná termodynamika přenosu informace

Vydala:	Vysoká škola chemicko-technologická v Praze Vydavatelství VŠCHT Praha Technická 5, 166 28 Praha 6
Odpovědná redaktorka:	Ing. Eva Dibuszová, Ph.D.
Obálka a grafická úprava:	Jan Žalud
Tisk:	KANAG - TISK, s.r.o., Technická 5, 166 28 Praha 6
Počet stran:	118
Vydání:	první